Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Kryteria oceniania odpowiedzi

CZERWIEC 2012

Zadanie 1. (0-4)

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną (III.3.e.R)

<u>I sposób rozwiązania</u> (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)
Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $\left(-\infty,-1\right)$, $\left\langle -1,2\right)$, $\left\langle 2,\infty\right)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x\in\left(-\infty,-1\right)$	$x\in\left\langle -1,2\right)$	$x\in\left\langle 2,\infty\right)$
$-x+2-x-1\ge 3x-3$ $-5x\ge -4$ $x\le \frac{4}{5}$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x<-1$	$-x+2+x+1\ge 3x-3$ $-3x\ge -6$ $x\le 2$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-1\le x<2$	$x-2+x+1\ge 3x-3$ $-x\ge -3+1$ $x\le 2$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x=2$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(-\infty,2\right\rangle$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 pkt
Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $\left(-\infty,-1\right)$, $\left\langle -1,2\right)$, $\left\langle 2,\infty\right)$.

<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów.**

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt
Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x\in\left(-\infty,-1\right)$ $\quad -x+2-x-1\ge 3x-3$

II. $x\in\left\langle -1,2\right)$ $\quad -x+2+x+1\ge 3x-3$

III. $x\in\left\langle 2,\infty\right)$ $\quad x-2+x+1\ge 3x-3$

<u>Uwaga</u>
Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...3 pkt

- Zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i poprawnie wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, a w trzecim przypadku popełni błąd i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca albo

- poprawnie rozwiąże nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \left(-\infty, 2\right\rangle$ lub $x \leq 2$.

Uwaga
Zdający może włączyć liczby –1 i 2 do wszystkich ograniczonych tymi liczbami przedziałów. Jeżeli natomiast nie włączy tych liczb do żadnego rozważanego przedziału (rozważy wszystkie przedziały otwarte), to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

II sposób rozwiązania (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x-2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \\ x-2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ -x+2+x+1 \geq 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \\ -x+2-x-1 \geq 3x-3 \end{cases}$
$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < -1 \\ \ldots \end{cases}$	$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x < 2 \\ x < -1 \\ x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$
$x = 2$	niemożliwe	$-1 \leq x < 2$	$-\infty < x < -1$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności są $x \leq 2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2 < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$

Uwaga
Jeżeli zdający błędnie zapisze którykolwiek z czterech przypadków, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów.**

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający zapisze cztery układy nierówności:

$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ x-2+x+1\ge 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x+1< 0 \\ x-2-x-1\ge 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2< 0 \\ x+1\ge 0 \\ -x+2+x+1\ge 3x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2< 0 \\ x+1< 0 \\ -x+2-x-1\ge 3x-3 \end{cases}$

Uwaga
Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..3 pkt

Zdający poprawnie rozwiąże co najmniej trzy układy nierówności.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\left(-\infty,2\right\rangle$ lub $x\le 2$.

Uwaga
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

III sposób rozwiązania (graficznie)

Rysujemy wykres funkcji $f\left(x\right)=\left|x-2\right|+|x+1|$ i prostą o równaniu $y=3x-3$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $\left(-\infty,-1\right)$, $\left\langle -1,2\right)$, $\left\langle 2,\infty\right)$.

Zapisujemy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

I. $x\in\left(-\infty,-1\right)$ $f\left(x\right)=-x+2-x-1$

II. $x\in\left\langle -1,2\right)$ $f\left(x\right)=-x+2+x+1$

III. $x\in\left\langle 2,\infty\right)$ $f\left(x\right)=x-2+x+1$

Przekształcamy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach do postaci $f\left(x\right)=ax+b$:

I. $x\in\left(-\infty,-1\right)$ $f\left(x\right)=-2x+1$

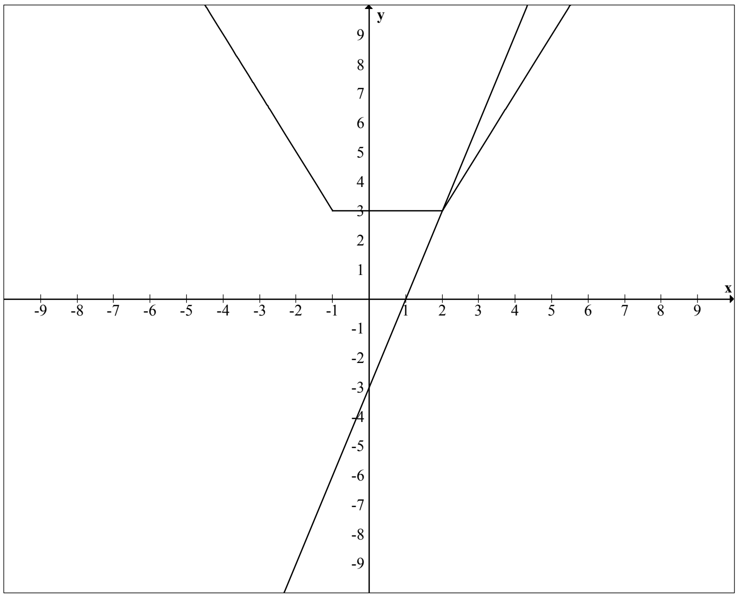
II. $x\in\left\langle -1,2\right)$ $f\left(x\right)=3$

III. $x\in\left\langle 2,\infty\right)$ $f\left(x\right)=2x-1$

lub

$$f\left(x\right)=\begin{cases} -2x+1 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-1\right) \\ 3 & \text{dla } x\in\left\langle -1,2\right) \\ 2x-1 & \text{dla } x\in\left\langle 2,\infty\right) \end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 3x - 3$:



Odczytujemy odciętą punktu przecięcia wykresu funkcji f i prostej o równaniu $y = 3x - 3$: $x = 2$. Podajemy argumenty, dla których $f(x) \geq 3x - 3$: $x \in \left(-\infty, 2\right\rangle$.

__Schemat oceniania III sposobu rozwiązania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2)$, $\langle 2, \infty)$.

__**Uwaga**__

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający poprawnie zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in (-\infty, -1)$ $\quad f(x) = -2x + 1$

II. $x \in \langle -1, 2)$ $\quad f(x) = 3$

III. $x \in \langle 2, \infty)$ $\quad f(x) = 2x - 1$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ 3 & \text{dla } x \in \langle -1, 2) \\ 2x - 1 & \text{dla } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y=3x-3$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający zapisze przedział: $x\in\left(-\infty,2\right\rangle$ lub $x\le 2$.

<u>Uwaga</u>

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

<u>IV sposób rozwiązania</u>

Rysujemy wykres funkcji $f\left(x\right)=\left|x-2\right|+\left|x+1\right|-3x+3$, postępując np. w opisany poniżej sposób.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $\left(-\infty,-1\right)$, $\left\langle -1,2\right)$, $\left\langle 2,\infty\right)$.

Zapisujemy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

I. $x\in\left(-\infty,-1\right)$ $\quad f\left(x\right)=-x+2-x-1-3x+3$

II. $x\in\left\langle -1,2\right)$ $\quad f\left(x\right)=-x+2+x+1-3x+3$

III. $x\in\left\langle 2,\infty\right)$ $\quad f\left(x\right)=x-2+x+1-3x+3$

Przekształcamy wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach do postaci $f\left(x\right)=ax+b$:

I. $x\in\left(-\infty,-1\right)$ $\quad f\left(x\right)=-5x+4$

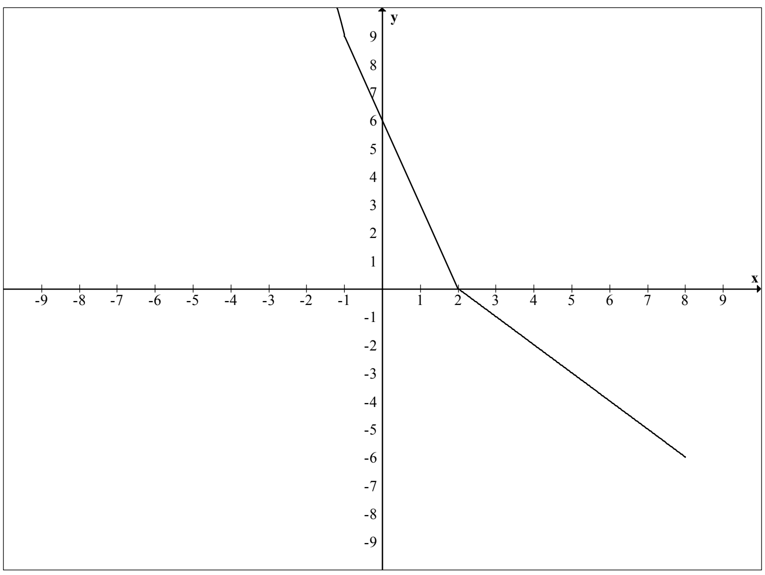
II. $x\in\left\langle -1,2\right)$ $\quad f\left(x\right)=-3x+6$

III. $x\in\left\langle 2,\infty\right)$ $\quad f\left(x\right)=-x+2$

lub

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-5x+4 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-1\right)\\ -3x+6 & \text{dla } x\in\left\langle -1,2\right)\\ -x+2 & \text{dla } x\in\left\langle 2,\infty\right)\end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f:



Odczytujemy wszystkie argumenty, dla których $f\left(x\right)\geq 0$, czyli: $-\infty < x \leq 2$

lub zapisujemy: zbiorem rozwiązań nierówności jest $\left(-\infty, 2\right\rangle$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyróżni przedziały: $\left(-\infty,-1\right)$, $\left\langle -1,2\right)$, $\left\langle 2,\infty\right)$.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach, np.

I. Jeśli $x\in\left(-\infty,-1\right)$, to $f\left(x\right)=-5x+4$

II. Jeśli $x\in\left\langle -1,2\right)$, to $f\left(x\right)=-3x+6$

III. Jeśli $x\in\left\langle 2,\infty\right)$, to $f\left(x\right)=-x+2$

albo

I. Jeśli $x<-1$, to $f\left(x\right)=-5x+4$

II. Jeśli $-1\leq x<2$, to $f\left(x\right)=-3x+6$

III. Jeśli $x\geq 2$, to $f\left(x\right)=-x+2$

albo

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-5x+4 & \text{dla } x\in\left(-\infty,-1\right)\\ -3x+6 & \text{dla } x\in\left\langle -1,2\right)\\ -x+2 & \text{dla } x\in\left\langle 2,\infty\right)\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji *f* .

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze przedział: $x\in\left(-\infty,2\right\rangle$ lub $x\leq 2$.

Uwaga
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre, to otrzymuje za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby zapisał wszystkie nierówności poprawnie.

Zadanie 2. (0-4)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie twierdzenia o równości wielomianów (IV.2.a.R)

Rozwiązanie (porównanie współczynników wielomianu)

Wielomian W zapisujemy w postaci kwadratu wielomianu P: $W(x)=\left(x^2+cx+d\right)^2$.

Przekształcamy ten wielomian i porządkujemy jego wyrazy:

$$W(x)=\left(x^2+cx+d\right)\cdot\left(x^2+cx+d\right)=x^4+cx^3+dx^2+cx^3+c^2x^2+cdx+dx^2+cdx+d^2=$$

$$=x^4+2cx^3+\left(2d+c^2\right)x^2+2cdx+d^2$$

Porównujemy współczynniki wielomianu W i zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases}2c=a\\2d+c^2=b\\2cd=-24\\d^2=9\end{cases}.\quad \text{Stąd}\quad \begin{cases}2c=a\\2d+c^2=b\\c=-4\\d=3\end{cases}\quad \text{lub}\quad \begin{cases}2c=a\\2d+c^2=b\\c=4\\d=-3\end{cases}\quad \text{i następnie}\quad \begin{cases}c=-4\\d=3\\a=-8\\b=22\end{cases}\quad \text{lub}\quad \begin{cases}c=4\\d=-3\\a=8\\b=10\end{cases}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie wielomianu W w postaci kwadratu wielomianu P: $W(x)=\left(x^2+cx+d\right)^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie wielomianu W w postaci uporządkowanej, np.:

$$W(x)=x^4+2cx^3+\left(2d+c^2\right)x^2+2cdx+d^2.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie a oraz b, np.: $\begin{cases}2c=a\\2d+c^2=b\\2cd=-24\\d^2=9\end{cases}$

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie a oraz b: $\begin{cases}a=-8\\b=22\end{cases}$ lub $\begin{cases}a=8\\b=10\end{cases}$.

Zadanie 3. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R)

I sposób rozwiązania

Z równania $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$ wyznaczamy jedną z funkcji trygonometrycznych w zależności od drugiej, np. $\cos\alpha = \frac{4}{3} - \sin\alpha$. Stąd i z jedynki trygonometrycznej mamy

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{4}{3} - \sin\alpha\right)^2 = 1$$

$$2\sin^2\alpha - \frac{8}{3}\sin\alpha + \frac{7}{9} = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin\alpha$ ma dwa rozwiązania:

$\sin\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$ lub $\sin\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

Gdy $\sin\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$, to $\cos\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

Natomiast gdy $\sin\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$, to $\cos\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

W każdym z tych przypadków wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$ jest taka sama i równa

$$\left|\frac{4+\sqrt{2}}{6} - \frac{4-\sqrt{2}}{6}\right| = \left|\frac{4+\sqrt{2}-4+\sqrt{2}}{6}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- Zapisanie równania, w którym występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna kąta α:

  $\sin^2\alpha + \left(\frac{4}{3} - \sin\alpha\right)^2 = 1$ albo $\left(\frac{4}{3} - \cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

albo

- wyznaczenie z równania $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$ jednej z funkcji w zależności od drugiej i zapisanie wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$ w zależności od tej funkcji:

  $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \left|\frac{4}{3} - 2\sin\alpha\right|$ albo $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \left|2\cos\alpha - \frac{4}{3}\right|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej:

$2\sin^2\alpha - \frac{8}{3}\sin\alpha + \frac{7}{9} = 0$ albo $2\cos^2\alpha - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{7}{9} = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt
Obliczenie wartości $\sin\alpha$ albo $\cos\alpha$:

$\sin\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$ lub $\sin\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$

albo

$\cos\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$ lub $\cos\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$

Rozwiązanie zadania prawie do końca ....4 pkt

- Obliczenie wartości drugiej funkcji trygonometrycznej kąta α:

  $\cos\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$ lub $\cos\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$

  albo

  $\sin\alpha = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$ lub $\sin\alpha = \frac{4+\sqrt{2}}{6}$

albo

- zapisanie wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$ w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej:

  $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \left|\frac{4}{3} - 2\sin\alpha\right|$ albo $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \left|2\cos\alpha - \frac{4}{3}\right|$

Rozwiązanie pełne ....5 pkt
Obliczenie wartości wyrażenia: $|\cos\alpha - \sin\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

__**II sposób rozwiązania**__

Podnosząc obie strony równania $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$ do kwadratu dostajemy

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = \frac{16}{9}$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, więc $2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{7}{9}$.

Zatem wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$ jest równa

$$|\cos\alpha - \sin\alpha| = \sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 2\cos\alpha\sin\alpha} = \sqrt{1 - \frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

__**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**__
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

- Obliczenie wartości $2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{7}{9}$

albo

- zapisanie wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$ w postaci $\sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

- Obliczenie wartości $2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{7}{9}$

oraz

- zapisanie wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$ w postaci $\sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}$.

Rozwiązanie zadania prawie do końca .... 4 pkt

- Obliczenie wartości $2\cos\alpha\,\sin\alpha=\frac{7}{9}$

oraz

- zapisanie wyrażenia $\left|\cos\alpha-\sin\alpha\right|$ w postaci $\sqrt{1-2\cos\alpha\sin\alpha}$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie wartości wyrażenia: $\left|\cos\alpha-\sin\alpha\right|=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Zadanie 4. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, Przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R)

<u>I sposób rozwiązania</u> (wzory Viète'a)
Aby równanie miało dwa różne pierwiastki musi zachodzić nierówność $\Delta>0$.
Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ \left|x_1-x_2\right|=3\end{cases}$$

Wyznaczamy Δ:

$$\Delta=(3-2m)^2-4\cdot2\cdot(-m+1)=9-12m+4m^2+8m-8=4m^2-4m+1=(2m-1)^2$$

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$: $(2m-1)^2>0$, czyli $2m-1\neq0$. Stąd $m\neq\frac{1}{2}$.

Wariant I

Równanie $\left|x_1-x_2\right|=3$ zapisujemy najpierw w postaci równoważnej $(x_1-x_2)^2=9$,
a dalej $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=9$, czyli $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9$.
Stosując wzory Viète'a zapisujemy równanie w postaci

$$\left(-\frac{3-2m}{2}\right)^2-4\cdot\frac{-m+1}{2}=9.$$

Stąd

$$(2m-3)^2-8(-m+1)=36$$
$$4m^2-4m-35=0$$
$$\Delta\ =576=24^2$$
$$m=\frac{4-24}{8}=-\frac{5}{2}\ \text{ lub }\ m=\frac{4+24}{8}=\frac{7}{2}.$$

Wariant II

Zapisujemy wyrażenie $\left|x_1-x_2\right|$ w postaci równoważnej i przekształcamy:

$$\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

Stąd, stosując wzory Viète'a, otrzymujemy:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{\frac{\Delta}{a^2}} = \frac{|2m-1|}{2}$$

Równanie $|x_1 - x_2| = 3$ jest zatem równoważne równaniu $\frac{|2m-1|}{2} = 3$

Stąd $|2m-1| = 6$ i następnie $2m-1=6$ lub $2m-1=-6$, czyli $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$.

Obie otrzymane wartości m są różne od $\frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (wzory na pierwiastki**)**

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki musi zachodzić nierówność $\Delta > 0$.

Wyznaczamy Δ:

$$\Delta = (3-2m)^2 - 4\cdot 2\cdot(-m+1) = 9 - 12m + 4m^2 + 8m - 8 = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2$$

Warunek $\Delta > 0$ zachodzi, gdy

$(2m-1)^2 > 0,$ co ma miejsce, gdy $2m-1 \neq 0,$ czyli dla $m \neq \frac{1}{2}$.

Ponieważ $\Delta = (2m-1)^2$, zatem $\sqrt{\Delta} = |2m-1|$.

Stąd $x_1 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4}$, $x_2 = \frac{2m-3+|2m-1|}{4}$.

Warunek $|x_1 - x_2| = 3$ możemy zapisać w postaci $x_1 - x_2 = 3$ lub $x_1 - x_2 = -3$.

Obliczamy:

$$x_1 - x_2 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4} - \frac{2m-3+|2m-1|}{4} = \frac{-2|2m-1|}{4} = -\frac{|2m-1|}{2}.$$

Zatem alternatywę $x_1 - x_2 = 3$ lub $x_1 - x_2 = -3$ możemy zapisać w postaci

$-\frac{|2m-1|}{2} = 3$ lub $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$

Pierwsze z otrzymanych równań jest sprzeczne, wystarczy więc rozwiązać drugie:

$-\frac{|2m-1|}{2} = -3$, stąd $|2m-1| = 6$.

Zatem $2m-1=6$ lub $2m-1=-6$, czyli $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

Część a) polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie rozwiązujemy nierówność $(2m-1)^2 > 0$: $m \neq \frac{1}{2}$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający rozpatrzy warunek $\Delta \geq 0$, wówczas za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Część b) polega na rozwiązaniu równania $|x_1 - x_2| = 3$: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Część c) polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązania nierówności z a) i rozwiązania równania z b). Za poprawne rozwiązanie części c) zdający otrzymuje **1 punkt**.

<u>W ramach części b) rozwiązania</u> wyróżniamy następujące etapy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- Zapisanie równania $|x_1 - x_2| = 3$ w postaci równoważnej $(x_1 - x_2)^2 = 9$

albo

- zapisanie równości $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$

albo

- obliczenie x_1 i x_2: $x_1 = \frac{2m-3-|2m-1|}{4}$, $x_2 = \frac{2m-3+|2m-1|}{4}$ oraz zapisanie równania $|x_1 - x_2| = 3$ w postaci alternatywy $x_1 - x_2 = 3$ lub $x_1 - x_2 = -3$.

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania .... 2 pkt

- Doprowadzenie równania $(x_1 - x_2)^2 = 9$ do postaci $4m^2 - 4m - 35 = 0$

albo

- zapisanie równania $|x_1 - x_2| = 3$ w postaci $\frac{|2m-1|}{2} = 3$

albo

- doprowadzenie równań $x_1 - x_2 = 3$ i $x_1 - x_2 = -3$ do postaci $-\frac{|2m-1|}{2} = 3$ i $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$.

Rozwiązanie pełne części b) .... 3 pkt

- Rozwiązanie równania $4m^2 - 4m - 35 = 0$: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$

albo

- rozwiązanie równania $\frac{|2m-1|}{2} = 3$: $m = -\frac{5}{2}$ lub $m = \frac{7}{2}$

albo

- rozwiązanie alternatywy równań: $-\frac{|2m-1|}{2} = 3$ lub $-\frac{|2m-1|}{2} = -3$: $m = \frac{7}{2}$ lub $m = -\frac{5}{2}$.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do tych błędów wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności i równania, to otrzymuje **4 punkty**.

III sposób rozwiązania (rozkład na czynniki)
Równanie $2x^2+(3-2m)x-m+1=0$ doprowadzamy do postaci iloczynowej kolejno otrzymując:
$2x^2+3x-2mx-m+1=0$
$2x^2+x+2x+1-2mx-m=0$
$x(2x+1)+(2x+1)-m(2x+1)=0$
$(2x+1)(x+1-m)=0$.
Zatem dla każdej wartości parametru m równanie ma pierwiastki:
$x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=m-1$.

Warunek $|x_1-x_2|=3$ ma zatem postać $\left|m-1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=3$, czyli $\left|m-\frac{1}{2}\right|=3$.

Stąd $m-\frac{1}{2}=3$ lub $m-\frac{1}{2}=-3$ i ostatecznie $m=3\frac{1}{2}$ lub $m=-2\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zapisanie równania w postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.: $2x^2+x+2x+1-2mx-m=0$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie równania w postaci iloczynowej: $(2x+1)(x+1-m)=0$.
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie x_1 i x_2: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=m-1$.
Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Rozwiązanie równania $|x_1-x_2|=3$: $m=3\frac{1}{2}$ lub $m=-2\frac{1}{2}$.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe i konsekwentnie do tych błędów rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 5. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i wzoru na sumę n początkowych wyrazów tego ciągu (IV.5.c)

Rozwiązanie
Szukamy odpowiedzi na pytanie: dla jakiej największej wartości n suma S_n początkowych kolejnych n wyrazów tego ciągu spełnia nierówność $S_n<2012$.

Suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$,

więc otrzymujemy nierówność $\frac{2(-2)+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n<2012$.

Stąd $\frac{(3n-7)n}{2} < 2012$ i następnie $3n^2 - 7n - 4024 < 0$.

Miejscami zerowymi trójmianu $3n^2 - 7n - 4024$ są liczby

$n_1 = \frac{7-\sqrt{48337}}{6}$ oraz $n_2 = \frac{7+\sqrt{48337}}{6}$.

Zatem szukane n jest największą liczbą całkowitą dodatnią z przedziału (n_1, n_2).

Przybliżona wartość $n_2 \approx \frac{7+219,86}{6} \approx 37,81$, więc szukaną wartością jest $n = 37$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ……………………………………………………...…1 pkt

Zapisanie nierówności (lub równania) z jedną niewiadomą:

$\frac{2(-2)+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n < 2012$ lub $\frac{-2+(3n-5)}{2}\cdot n < 2012$ lub $\frac{2(-2)+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n = 2012$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………………..2 pkt

Doprowadzenie nierówności kwadratowej lub równania kwadratowego do postaci ogólnej:

$3n^2 - 7n - 4024 < 0$ lub $3n^2 - 7n - 4024 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …………………………………………..3 pkt

Rozwiązanie nierówności $3n^2 - 7n - 4024 < 0$ lub równania $3n^2 - 7n - 4024 = 0$:

$n \in \left(\frac{7-\sqrt{48337}}{6}, \frac{7+\sqrt{48337}}{6}\right)$ lub $n_1 = \frac{7-\sqrt{48337}}{6}$, $n_2 = \frac{7+\sqrt{48337}}{6}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ………………………………….. 4 pkt

- Poprawne rozwiązanie nierówności kwadratowej lub równania kwadratowego, a następnie błędy rachunkowe w oszacowaniu liczby $n_2 = \frac{7+\sqrt{48337}}{6}$ i konsekwentne do tych błędów podanie odpowiedzi (o ile liczba $n \geq 1$)

albo

- błędy rachunkowe podczas przekształcania nierówności $\frac{2(-2)+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n < 2012$ lub $\frac{-2+(3n-5)}{2}\cdot n < 2012$ (lub równania) i konsekwentne do tych błędów podanie odpowiedzi (o ile trójmian kwadratowy ma dwa pierwiastki, a liczba n jest całkowita dodatnia).

Rozwiązanie pełne ……………………………………………………………………… 5 pkt

Zapisanie, że największą liczbą n dla której $a_1 + a_2 + ... + a_n < 2012$ jest $n = 37$.

Uwaga

Jeżeli zdający, stosując metodę prób i błędów, sprawdzi, że liczba $n = 37$ spełnia podaną nierówność, oraz sprawdzi, że liczba $n = 38$ nie spełnia tej nierówności, to otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 6. (0-3)

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)

Rozwiązanie
Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu obu stron nierówności do potęgi drugiej otrzymujemy nierówność równoważną
$\left(ac+bd\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)$.
Po otwarciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy nierówność
$2abcd \le a^2d^2+b^2c^2$, a następnie $a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \ge 0$, czyli $\left(ad-bc\right)^2 \ge 0$.
Otrzymana nierówność jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b, c, d, co kończy dowód.

Schemat oceniania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy przekształci nierówność do postaci równoważnej $\left(ac+bd\right)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy doprowadzi nierówność do postaci $2abcd \le a^2d^2+b^2c^2$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje ....3 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 7. (0-4)

Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie zadania dotyczącego wzajemnego położenia prostej i okręgu (IV.8.b.R)

I sposób rozwiązania
Obliczamy współrzędne środka okręgu i długość promienia okręgu: $S=\left(2,2\right)$, $r=2$.
Zapisujemy równanie okręgu: $\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$.
Okrąg jest styczny do prostej l w punkcie $C=\left(1,a\right)$, więc współrzędne tego punktu spełniają równanie okręgu $\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$.
$\left(1-2\right)^2+\left(a-2\right)^2=4, \quad \left(a-2\right)^2=3, \quad \left|a-2\right|=\sqrt{3}$.
Stąd $a=2+\sqrt{3}$ lub $a=2-\sqrt{3}$.
$a=2-\sqrt{3}$ nie spełnia warunku zadania, więc $C=\left(1,2+\sqrt{3}\right)$.
Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej CS: $m=-\sqrt{3}$.
Wyznaczamy równanie prostej l prostopadłej do prostej CS i przechodzącej przez punkt C.

$l: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$

$2+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}+b$

$b=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

A zatem prosta $l: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

II sposób rozwiązania

Podobnie, jak w I sposobie rozwiązania, znajdujemy współrzędne punktu *C*: $C=\left(1,2+\sqrt{3}\right)$.

Następnie obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{CS}=\left[1,-\sqrt{3}\right]$.

Wyznaczamy równanie prostej *l* prostopadłej do wektora $\overrightarrow{CS}$ i przechodzącej przez punkt *C*.
$l: (x-1)-\sqrt{3}\left(y-2-\sqrt{3}\right)=0$, czyli $l: x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}+2=0$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie równania okręgu: $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu $C: C=\left(1,2+\sqrt{3}\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie współczynnika kierunkowego prostej *CS*: $m=-\sqrt{3}$ lub obliczenie współrzędnych wektora $\overrightarrow{CS}=\left[1,-\sqrt{3}\right]$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie równania prostej *l* i zapisanie go w postaci kierunkowej $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

lub ogólnej $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}+2=0$.

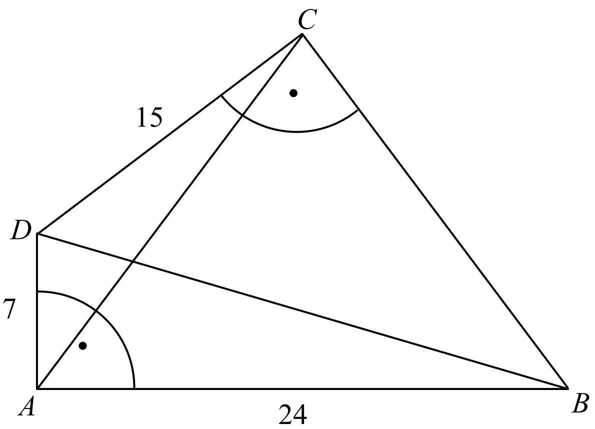
Uwaga:

Jeżeli zdający nie odrzuci $a=2-\sqrt{3}$ i rozwiąże zadanie do końca podając równania dwóch prostych, to otrzymuje **3 punkty.**

Zadanie 8. (0-5)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii (III.7.d.R)

Rozwiązanie



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BAD* mamy

$|BD| = \sqrt{|AD|^2 + |AB|^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BCD* mamy

$|BC| = \sqrt{|BD|^2 - |CD|^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20$.

$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 234$.

Wariant I

Ponieważ *BD* jest wspólną przeciwprostokątną trójkątów prostokątnych *ABD* i *BCD*, więc na czworokącie *ABCD* można opisać okrąg, którego średnicą jest *BD*.

W okrąg opisany na czworokącie *ABCD* jest też wpisany trójkąt *ABC*. Z twierdzenia sinusów dla tego trójkąta wynika, że

$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = |BD|$, stąd $|AC| = |BD| \cdot \sin|\sphericalangle ABC| = 25 \sin\left(|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|\right)$.

Stąd i ze wzoru na sinus sumy kątów mamy

$|AC| = 25\left(\sin|\sphericalangle ABD| \cos|\sphericalangle DBC| + \cos|\sphericalangle ABD| \sin|\sphericalangle DBC|\right) = 25\left(\frac{7}{25} \cdot \frac{20}{25} + \frac{24}{25} \cdot \frac{15}{25}\right) = 20$.

Wariant II

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABC*:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$.

$\cos|\sphericalangle ABC| = \cos\left(|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|\right) = \cos|\sphericalangle ABD| \cdot \cos|\sphericalangle DBC| - \sin|\sphericalangle ABD| \cdot \sin|\sphericalangle DBC| =$

$= \frac{24}{25} \cdot \frac{20}{25} - \frac{7}{25} \cdot \frac{15}{25} = \frac{375}{25 \cdot 25} = \frac{3}{5}$.

Stąd $|AC|^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \frac{3}{5} = 576 + 400 - 576 = 400$, czyli $|AC| = 20$.

Wariant III

Korzystamy z twierdzenia Ptolemeusza:

$|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD|$ czyli $|AC|\cdot 25 = 24\cdot 15 + 20\cdot 7 = 500$.

Stąd $|AC| = 20$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie długości przekątnej *BD*: $|BD| = 25$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości boku *BC* oraz pola czworokąta: $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = 234$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy pole czworokąta *ABCD* popełniając błędy rachunkowe i na tym poprzestanie lub dalej błędnie rozwiązuje zadanie, to otrzymuje **1 punkt**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- Zauważenie, że przekątna *BD* jest średnicą okręgu opisanego na czworokącie *ABCD* (czyli również na trójkącie *ABC*) i zastosowanie twierdzenia sinusów do obliczenia przekątnej *AC*: $\dfrac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = |BD|$

albo

- zastosowanie twierdzenia cosinusów do obliczenia przekątnej *AC*: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB|\cdot|BC|\cdot\cos|\sphericalangle ABC|$

albo

- zastosowanie twierdzenia Ptolemeusza do obliczenia przekątnej *AC*: $|AC|\cdot|BD| = |AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD|$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Obliczenie długości przekątnej *AC* z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie długości przekątnej *AC*: $|AC| = 20$.

Zadanie 9. *(*0-3*)*

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R)

I sposób rozwiązania (*konsekwencje reguły dodawania*)

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Oznaczamy przez A_k zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez *k*. Mamy obliczyć $|A_6 \cup A_{15}|$.

$|A_6 \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_6 \cap A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_{30}|$.

Teraz wystarczy obliczyć, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6, następnie podzielnych przez 15 i następnie przez 30.

Kolejne 900 liczb całkowitych można podzielić na 150 pełnych szóstek (czyli kolejnych sześć liczb całkowitych). W każdej takiej szóstce jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 6. Wynika stąd, że trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 6 jest dokładnie 150.
Rozumując analogicznie stwierdzamy, że trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 15 jest 60, a trzycyfrowych liczb całkowitych podzielnych przez 30 jest 30.
Stąd $|A_6 \cup A_{15}| = |A_6| + |A_{15}| - |A_{30}| = 150 + 60 - 30 = 180$.
Liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

II sposób rozwiązania (*diagram Venna*)

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Oznaczamy przez A_k zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez *k*.
Rysujemy diagram Venna dla A_6 i A_{15}.
Wpisujemy liczby elementów poszczególnych parami rozłącznych zbiorów zaczynając od $|A_6 \cap A_{15}| = |A_{30}| = 30$, a następnie korzystając z faktów, że $|A_6| = 150$ i $|A_{15}| = 60$ wpisujemy liczby w pozostałe zbiory i zapisujemy odpowiedź:
liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

III sposób rozwiązania

Liczb naturalnych trzycyfrowych jest 900. Stwierdzamy, że liczb trzycyfrowych podzielnych przez 6 jest 150, liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15 jest 60 oraz, że dodając te liczby policzyliśmy liczby podzielne przez 30 dwa razy. Stąd wynika, że liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub przez 15 jest 180.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy stosuje poprawną metodę rozwiązania zadania i popełnia błędy w obliczeniu $|A_6|$ lub $|A_{15}|$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy stosując poprawną metodę rozwiązania zadania obliczy $|A_6|$ oraz $|A_{15}|$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy $|A_{30}|$.

Zdający otrzymuje ....3 pkt
gdy rozwiąże zadanie bezbłędnie.

Zadanie 10. *(0-4)*

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (IV.8.e, 4.k)

Rozwiązanie
Każdy punkt *P* należący do prostej $y = 8x + 10$ ma współrzędne $(x, 8x + 10)$.

Wyznaczamy wzór funkcji *f* opisującej sumę $|AP|^2 + |BP|^2$:

$f(x) = (3 - x)^2 + (12 + 8x)^2 + (11 - x)^2 + (6 + 8x)^2$, stąd $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$.

Ponieważ parabola, będąca wykresem otrzymanej funkcji kwadratowej *f*, ma ramiona skierowane do góry, to współrzędna *x* szukanego punktu *P* jest równa x_w tej paraboli.

$x_w = \frac{-260}{2 \cdot 130} = -1$.

Szukany punkt *P* należy do prostej $y = 8x + 10$, więc $P = (-1, 2)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie za pomocą niewiadomej *x* współrzędnych punktu *P*: $P = (x, 8x + 10)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .. .. 2 pkt

Wyznaczenie wzoru funkcji *f*: $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania . ... 3 pkt

Obliczenie *x*, dla którego funkcja $f(x) = 130x^2 + 260x + 310$ przyjmuje wartość najmniejszą: $x = -1$.

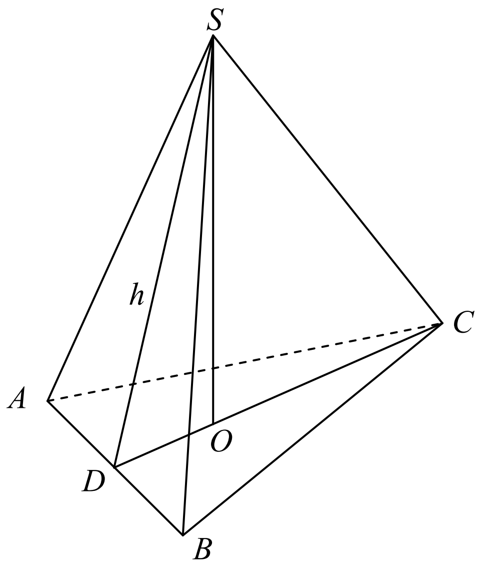
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Podanie współrzędnych punktu *P*, dla którego suma $|AP|^2 + |BP|^2$ przyjmuje najmniejszą wartość: $P = (-1, 2)$.

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.b)

Rozwiązanie



Obliczamy pole trójkąta *ABC*.
Oznaczmy wysokość trójkąta *ABC* opuszczoną na podstawę *AB* przez h_{AB}. Wtedy z tw. Pitagorasa:

$$h_{AB} = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{1}{2}|AB|\right)^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540$.

Z równości wysokości ścian bocznych ostrosłupa wynika, że punkt O – spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny ABC.

Obliczamy promień r okręgu wpisanego w trójkąt ABC ze wzoru $r = \frac{P_{ABC}}{p}$, gdzie p jest połową obwodu trójkąta ABC: $r = \frac{540}{54}$, czyli $r = 10$.

Oznaczmy wysokość DS ściany bocznej ABS tego ostrosłupa przez h.

Następnie obliczamy wysokość $H = |OS|$ ostrosłupa $ABCS$: $H = \sqrt{h^2 - r^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

oraz jego objętość V: $V = \frac{1}{3} \cdot 540 \cdot 24 = 4320$.

Uwaga

Aby obliczyć pole trójkąta ABC, możemy także skorzystać ze wzoru Herona:

$P_{ABC} = \sqrt{54 \cdot 24 \cdot 15 \cdot 15} = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 540$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Obliczenie pola P trójkąta ABC: $P_{ABC} = 540$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....3 pkt

Obliczenie promienia r okręgu wpisanego w trójkąt ABC: $r = 10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Obliczenie wysokości H ostrosłupa $ABCS$: $H = 24$.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Obliczenie objętości V ostrosłupa: $V = 4320$.

Zadanie 12. (0-3)

Rozumowanie i argumentacja	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c.d)

Rozwiązanie

Zdarzenia $A \cap B'$, $A' \cap B$ oraz $A \cap B$ są parami rozłączne i

$(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Stąd i z faktu, że $P(A \cup B) \le 1$ wynika, że

$1 \ge P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B)$ czyli $P(A \cap B) \le 0,7$, co kończy dowód.

Uwagi:

1. Zdający nie musi zapisywać, że $(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.
2. Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą diagramu Venna.

<u>Schemat oceniania rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

- Zdający zapisze, że $P\left(\left(A\cap B'\right)\cup\left(A'\cap B\right)\cup\left(A\cap B\right)\right)\le 1$

albo

- zadający sporządzi diagram Venna, na którym zaznaczy zdarzenia $A'\cap B$ i $A\cap B'$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

- Zdający zapisze, że zdarzenia $A\cap B'$, $A'\cap B$, $A\cap B$ są parami rozłączne

albo

- zadający sporządzi diagram Venna, na którym zaznaczy zdarzenia $A'\cap B$ i $A\cap B'$ oraz zapisze, np.: $P\left(A'\cap B\right)+P\left(A\cap B'\right)+P\left(A\cap B\right)=P\left(A\cup B\right)$, skąd wynika, że zdarzenia $A'\cap B$, $A\cap B'$, $A\cap B$ są parami rozłączne.

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający przeprowadzi pełny dowód, ale nie zapisze, że podane zdarzenia są parami rozłączne, to otrzymuje **2 punkty**.