Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

CZERWIEC 2012

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	**Poprawna odpowiedź (1 p.)**
Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Usuwanie niewymierności z mianownika (I.1.a)	**D**

Zadanie 2. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do sprawdzenia czy dane liczby są rozwiązaniami równania typu $\lvert x-a \rvert = b$ (I.1.f)	**A**

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Odczytanie z postaci iloczynowej równania wielomianowego jego rozwiązań (I.3.d)	**A**

Zadanie 4. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Wykonanie obliczeń procentowych (III.1.d)	**C**

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie wykresu funkcji kwadratowej danej wzorem (II.4.a)	**A**

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej (II.4.b)	**D**

Zadanie 7. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie rachunku kątów w trójkącie (III.7.c)	**C**

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych (II.7.c)	**C**

Zadanie 9. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c)	**C**

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym (II.7.a)	**D**

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wskazanie trójkąta przystający do danego (I.7.c)	**B**

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie równania okręgu o podanym środku i promieniu (II.8.g)	**A**

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie różnicy wyrażeń wymiernych (II.2.f)	**A**

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Obliczenie wyrazu ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym (I.5.a)	**A**

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie wyrazu ciągu geometrycznego z wykorzystaniem własności ciągu (II.5.c)	B

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wyznaczenie miary kąta ostrego (I.6.b)	**C**

Zadanie 17. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Określenie wzoru funkcji o podanej dziedzinie (IV.4.a)	**D**

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zinterpretowanie znaków współczynników a i b we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	**C**

Zadanie 19. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka (II.8.f)	**A**

Zadanie 20. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie mediany zbioru danych (II.10.a)	**C**

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia (II.2.a)	**C**

Zadanie 22. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Obliczenie objętości stożka (III.9.b)	**C**

Zadanie 23. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (IV.10.b)	**D**

Zadanie 24. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Wyznaczenie związków miarowych w walcu (III.9.b)	**B**

Zadanie 25. (0–2)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -2, x_2 = 5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy,

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2 - 3x - 10$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x+2)(x-5) < 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np., $x_1 = 2, x_2 = -5$, stąd $x \in (-5, 2)$,

albo

- doprowadzi nierówność do postaci $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}$ (na przykład z postaci $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < 0$ otrzymuje $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4}$, a następnie $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}$)
  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

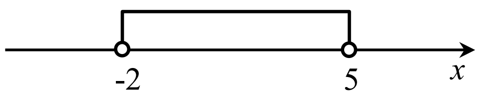
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-2 < x < 5$ lub $(-2, 5)$ lub $x \in (-2, 5)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x > -2$, $x < 5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x = -2$, $x = 5$ i zapisze np.: $x \in (2, 5)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadania 26. (0–2)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie definicję średniej arytmetycznej do wyznaczenia liczby elementów zbioru danych (III.10.a)

I sposób rozwiązania

Niech x oznacza liczbę studentów w danej grupie. Wtedy łączna liczba lat studentów w danej grupie wynosi $23x$, zaś łączna liczba lat studentów i opiekuna to $23x+39$. Zatem średnia wieku studentów wraz z opiekunem jest równa: $\frac{23x+39}{x+1}$.

Otrzymujemy równanie $\frac{23x+39}{x+1}=24$ stąd $23x+39=24(x+1)$, a więc $x=15$.

Odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze nową średnią wieku studentów wraz z opiekunem: $\frac{23x+39}{x+1}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy liczbę studentów w grupie: 15 osób.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy zależności pomiędzy liczbą studentów danej grupy, a łączną liczbą lat wszystkich studentów. Niech x oznacza liczbę studentów w grupie, zaś S łączną liczbę lat studentów.

Zapisujemy układ równań: $\begin{cases} \frac{S}{x}=23 \\ \frac{S+39}{x+1}=24 \end{cases}$

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} S=23x \\ \frac{23x+39}{x+1}=24 \end{cases}$

$$23x+39=24(x+1)$$

$$x=15$$

Odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze układ równań opisujący średnie wieku, np. $\begin{cases} \frac{S}{x}=23 \\ \frac{S+39}{x+1}=24 \end{cases}$

gdzie x jest liczbą studentów w danej grupie, zaś S jest łączną liczbą lat studentów, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy liczbę studentów w danej grupie: 15 studentów.

III sposób rozwiązania

Różnicę wieku opiekuna i średniej wieku studentów rozdzielamy między x studentów i jednego opiekuna.

- Obliczamy różnicę wieku opiekuna i średniej wieku studentów $39-23=16$.
- Ponieważ średnia wieku wzrosła o 1 rok, więc te 16 lat rozdzielamy pomiędzy studentów i opiekuna, każdemu dodając 1 rok.
- Zatem $16=x\cdot 1+1$, stąd $x=15$.
- Zapisujemy odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

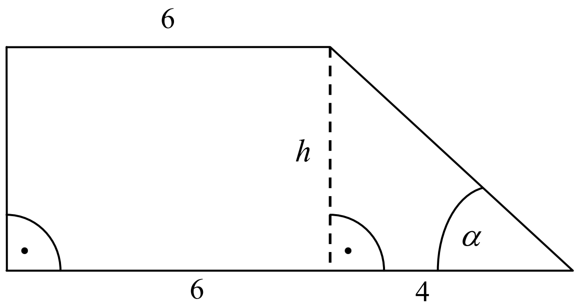
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy obliczy różnicę lat opiekuna i średniej wieku studentów $39-23=16$ i słownie zapisze sposób rozumowania, np.: *Ponieważ średnia lat wzrosła do* 24 *lat, więc każdemu studentowi z tych* 16 *lat dodajemy* 1 *rok oraz* 1 *rok dla opiekuna* i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy liczbę studentów w danej grupie: 15 studentów.

Zadanie 27. (0–2)

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie pole trapezu prostokątnego. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych (IV.7.c)

Rozwiązanie



Obliczamy wysokość trapezu *h*, korzystając z faktu, że tangens kąta ostrego jest równy 3:

$\frac{h}{4}=3$, stąd $h=12$.

Zatem pole trapezu jest równe $\frac{(6+10)\cdot 12}{2}=96$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- obliczy wysokość trapezu $h=12$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy pole,

albo

- obliczy wysokość trapezu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poprawnie obliczy pole trapezu $P=96$.

Zadania 28. (0–2)

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznej z zastosowaniem prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kata ostrego (V.6.c)

I sposób rozwiązania

$$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha = \cos^4\alpha - \cos^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right) = \cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right)$$
$$\sin^2\alpha\left(-\cos^2\alpha\right) = \cos^2\alpha\left(-\sin^2\alpha\right)$$
$$L = P$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy przekształci lewą lub prawą stronę tej równości do postaci:
$\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right)$ lub $\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

II sposób rozwiązania

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$
$$\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$
$$1\cdot\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$
$$L = P$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy uzyska po lewej stronie wyrażenie $\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

III sposób rozwiązania

$$L = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot\left(1 - \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha =$$
$$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 - \left(1 - \cos^2\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha + \cos^4\alpha =$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^4\alpha = P$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy przekształcając lewą lub prawą stronę równość uzyska wyrażenie
$\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

IV sposób rozwiązania

$\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^4\alpha$

$\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=\left(1-\cos^2\alpha\right)+\cos^4\alpha$

$1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

$1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

$L=P$

lub

$\sin^4\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$\sin^4\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)$

$\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+1=\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha$

$\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+1=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+1$

$L=P$

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy przekształci równość do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna, np.: $\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=\left(1-\cos^2\alpha\right)+\cos^4\alpha$ lub $\sin^4\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha+\left(1-\sin^2\alpha\right)\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

jeżeli przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

V sposób rozwiązania

Daną równość zapisujemy w postaci $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$. Przekształcamy:

$L=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^2-\cos^4\alpha=\left(1-\cos^2\alpha\right)^2-\cos^4\alpha=$

$=1-2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\cos^4\alpha=1-2\cos^2\alpha=1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=P$

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy uzyska po lewej stronie wyrażenie $\left(1-\cos^2\alpha\right)^2-\cos^4\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

Zadanie 29. (0–2)

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.a)

I sposób rozwiązania

Weźmy trzy kolejne liczby całkowite $n-1$, n, $n+1$. Wówczas $\left(n-1\right)^2+n^2+\left(n+1\right)^2=n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1=3n^2+2$, więc reszta z dzielenia sumy ich kwadratów przez 3 jest równa 2.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych w postaci

$\left(n-1\right)^2+n^2+\left(n+1\right)^2=3n^2+2$

II sposób rozwiązania

Weźmy trzy kolejne liczby całkowite n, $n+1$, $n+2$.

Wówczas $n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2=3n^2+6n+5=3\left(n^2+2n+1\right)+2$, więc reszta z dzielenia sumy ich kwadratów przez 3 jest równa 2.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych, doprowadzi wyrażenie do postaci $n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2=3n^2+6n+5$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych w postaci

$n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2=3n^2+6n+3+2$ lub $n^2+\left(n+1\right)^2+\left(n+2\right)^2=3\left(n^2+2n+1\right)+2$.

Uwaga

Mogą się zdarzyć rozwiązania wykorzystujące kongruencje:
wśród trzech kolejnych liczb jest jedna podzielna przez 3 (oznaczymy ją przez *a*), jedna dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 (oznaczymy ją przez *b*) i jedna dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 (oznaczymy ją przez *c*).

Mamy zatem $a\equiv 0\left(\bmod 3\right), b\equiv 1\left(\bmod 3\right), c\equiv 2\left(\bmod 3\right)$.

Wówczas $a^2+b^2+c^2\equiv 0^2+1^2+2^2=5\equiv 2\left(\bmod 3\right)$.

Zadanie 30. (0–2)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie wzoru na n-ty wyraz i sumę ciągu arytmetycznego (III.5.c)

I sposób rozwiązania

Obliczamy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0.$$

Zatem $a_2 = 0 - (-1) = 1$ oraz $r = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$.

Korzystamy ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$a_n = a_1 + (n-1)r = -1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 3$

Odpowiedź: n-ty wyraz ciągu (a_n) wyraża się wzorem $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy obliczy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy bezbłędnie wyznaczy n-ty wyraz ciągu (a_n): $a_n = 2n - 3$.

Uwagi

1. Zdający może od razu zapisać układ $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$
2. Jeżeli zdający zapisze układ $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$, to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązania

Zauważamy, że dla $n > 1$ mamy $a_n = S_n - S_{n-1}$.

$S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$

Obliczamy $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3$ oraz $a_1 = S_1 = -1$.

Zauważamy ponadto, że wzór $a_n = 2n - 3$ dla $n = 1$ daje otrzymaną wartość $a_1 = -1$.

Zatem dla każdego $n \ge 1$ otrzymujemy $a_n = 2n - 3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze, że $a_n = S_n - S_{n-1}$, wyznaczy $S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy bezbłędnie wyznaczy n-ty wyraz ciągu: $a_n = 2n - 3$.

Uwaga
Przyznajemy **2 punkty** nawet wtedy, gdy zdający nie sprawdzi, czy $a_1 = -1$.

III sposób rozwiązania

Zauważamy, że $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ i wyznaczamy $a_n = 2n - 4 - a_1$.

Obliczamy $a_1 = S_1 = -1$. Stąd otrzymujemy $a_n = 2n - 4 + 1$, czyli $a_n = 2n - 3$.

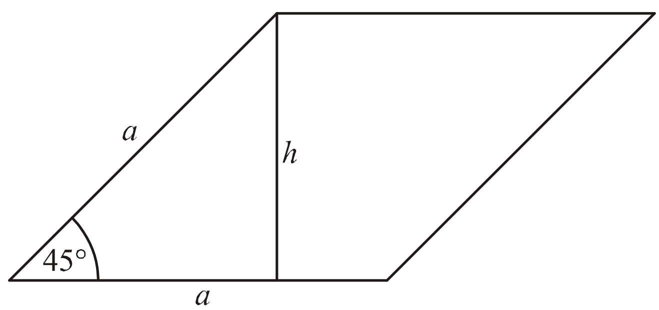
Schemat oceniania III sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy ze wzoru $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ wyznaczy $a_n = 2n - 4 - a_1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy n-ty wyraz ciągu: $a_n = 2n - 3$.

Uwagi
1. Zdający może od razu zapisać, że $a_n = 2n - 4 - a_1$.
2. Jeśli zdający zapisze, że $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$, wyznaczy z błędem rachunkowym a_n np.: $a_n = 2n - 2 - a_1$ i z tym błędem doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 31. (0–2)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)

I sposób rozwiązania



Z warunków zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot h = 50\sqrt{2} \\ \frac{h}{a} = \sin 45^\circ \end{cases}$$

Zatem $h = a \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} a$ oraz $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = 50\sqrt{2}$.

Wobec tego $a^2 = 100$, $a = 10$, $h = 10\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Odpowiedź: Wysokość rombu jest równa $5\sqrt{2}$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze dwa związki między liczbami *a* i *h* i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poprawnie obliczy wysokość rombu $h = 5\sqrt{2}$.

<u>**II sposób rozwiązania**</u>

Ze wzoru na pole równoległoboku, gdy dane są jego dwa sąsiednie boki oraz kąt między nimi zawarty, mamy $a^2 \cdot \sin 45^\circ = 50\sqrt{2}$. Zatem $a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$, $a^2 = 100$, $a = 10$.

Z innego wzoru na pole równoległoboku mamy $a \cdot h = 50\sqrt{2}$.
Wobec tego $10 \cdot h = 50\sqrt{2}$ oraz $h = 5\sqrt{2}$.

<u>**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**</u>
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy poprawnie obliczy długość *a* boku rombu i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poprawnie obliczy wysokość rombu $h = 5\sqrt{2}$.

Zadanie 32. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczenie punktu przecięcia się prostych prostopadłych (IV.8.b, 8.c, 8.d)

<u>**I sposób rozwiązania**</u>
Wyznaczamy równanie prostej *AB*: $y = 2x + 7$.
Wyznaczamy równanie prostej *CD* prostopadłej do prostej *AB* i przechodzącej przez punkt *C*:
$y = -\dfrac{1}{2}x + 17$.

Zapisujemy układ równań: $\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 17 \end{cases}$

Rozwiązujemy układ równań i zapisujemy współrzędne punktu *D*: $D = (4, 15)$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej *AB*: $y = 2x + 7$

albo

- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej *AB*: $a = 2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Wyznaczenie równania prostej CD prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C $y=-\frac{1}{2}x+17$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie układu równań: $\begin{cases} y=2x+7 \\ y=-\frac{1}{2}x+17 \end{cases}$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Rozwiązanie układu równań i zapisanie współrzędnych punktu D: $D=(4,15)$.

Uwagi
1. Jeśli zdający źle wyznaczy równanie prostej AB i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** (współczynnik kierunkowy prostej AB powinien być jednak liczbą dodatnią).
2. Jeśli zdający odczyta współrzędne punktu D na podstawie dokładnie sporządzonego rysunku to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeśli zdający poda współrzędne punktu D bez dokładnego rysunku lub uzasadnienia to otrzymuje **0 punktów**.

II sposób rozwiązania
Obliczamy pole trójkąta ABC: $P_{ABC}=15$. Obliczamy długość podstawy AB trójkąta ABC: $|AB|=6\sqrt{5}$. Ze związku $P_{ABC}=\frac{1}{2}|CD|\cdot|AB|$ obliczamy wysokość CD trójkąta ABC: $|CD|=\sqrt{5}$. Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=2x+7$. Zapisujemy współrzędne punktu D w zależności od zmiennej x: $D=(x,2x+7)$. Wyrażamy związek $|CD|=\sqrt{5}$ za pomocą równania $\sqrt{(x-6)^2+(2x+7-14)^2}=\sqrt{5}$, gdzie x oznacza pierwszą współrzędną punktu D.
Rozwiązujemy równanie i otrzymujemy $x=4$. Zapisujemy zatem współrzędne punktu D: $D=(4,15)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Obliczenie pola trójkąta ABC: $P_{ABC}=15$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie wysokości CD trójkąta ABC: $|CD|=\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie współrzędnych punktu D w zależności od jednej zmiennej: $D=(x,2x+7)$ i zapisanie równania $\sqrt{(x-6)^2+(2x+7-14)^2}=\sqrt{5}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Rozwiązanie równania i zapisanie współrzędnych punktu D: $D=(4,15)$.

Uwaga
Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pola trójkąta ABC i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 33. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Zliczenie obiektów w prostej sytuacji kombinatorycznej (IV.10.b)

I sposób rozwiązania

Zauważamy, że dla poprawnego rozwiązania zadania istotne są **trzy grupy cyfr**:
cyfra 7, cyfry parzyste bez zera oraz cyfry nieparzyste różne od 7.

- Miejsce dla cyfry 7 możemy wybrać na 5 sposobów.
- Miejsce dla cyfry parzystej możemy wybrać na 4 sposoby.
- Cyfrę parzystą do wpisania na wybranym miejscu możemy wybrać spośród 4 cyfr parzystych, czyli na 4 sposoby.
- Na pozostałych trzech miejscach możemy wpisać cyfry nieparzyste różne od 7. Możemy to zrobić na $4^3 = 64$ sposoby.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania jest:
$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 5 \cdot 4^5 = 5 \cdot 1024 = 5120$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie, na ile sposobów można ustawić cyfry z **dwóch grup cyfr** (spośród trzech rozważanych).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie, na ile sposobów można ustawić cyfry z **trzech grup cyfr**:

- Miejsce dla cyfry 7 – na 5 sposobów.
- Miejsce dla cyfry parzystej – na 4 sposoby.
- Cyfrę parzystą do wpisania na wybranym miejscu – na 4 sposoby.
- Cyfry nieparzyste różne od 7 na pozostałych trzech miejscach – na $4^3 = 64$ sposoby.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie, ile liczb pięciocyfrowych spełnia warunki zadania: $5 \cdot 4^5 = 5120$.

II sposób rozwiązania

Rozpatrujemy następujące trzy warianty ustawień cyfr:

1) na pierwszym miejscu cyfra 7, na jednym z czterech miejsc cyfra parzysta, a na każdym z pozostałych trzech miejsc cyfra nieparzysta różna od 7.
   Każdą z czterech cyfr parzystych możemy umieścić **na jednym z czterech miejsc** na $4 \cdot 4$ sposobów, zaś każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych (bez cyfry 7) możemy rozmieścić **na trzech miejscach** na $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ sposobów. Zatem liczba możliwych ustawień cyfr w tym wariancie równa się: $4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024$.

2) na pierwszym miejscu cyfra parzysta różna od 0, na jednym z czterech pozostałych miejsc cyfra 7, zaś na każdym z pozostałych trzech miejsc cyfra nieparzysta różna od 7.
   Na pierwszym miejscu możemy ustawić **każdą z czterech cyfr parzystych różnych od zera**, zaś na **każdym z pozostałych czterech miejsc** możemy umieścić cyfrę 7, stąd otrzymujemy $4 \cdot 4$ możliwości ustawień cyfry parzystej oraz cyfry 7. Natomiast każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych różnych od 7 możemy rozmieścić **na pozostałych trzech miejscach** na $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ sposobów. Zatem liczba możliwych ustawień cyfr w tym wariancie jest równa:
   $4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024$.

3) na pierwszym miejscu cyfra nieparzysta różna od 7, na jednym z pozostałych czterech miejsc cyfra parzysta, na jednym z trzech pozostałych miejsc cyfra 7, a na pozostałych dwóch miejscach cyfra nieparzysta różna od 7.

Każdą z czterech cyfr nieparzystych (różną od 7) możemy umieścić na pierwszym miejscu (4 sposoby). Na każdym z czterech pozostałych miejsc możemy umieścić każdą z czterech cyfr parzystych na $4\cdot 4$ sposobów. Cyfrę 7 możemy umieścić na każdym z trzech pozostałych miejsc, zaś każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych różnych od 7 umieścimy na dwóch miejscach na $3\cdot 4\cdot 4=3\cdot 4^2$ sposobów. Zatem, w tym wariancie, liczba możliwych ustawień jest równa: $4\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 4^2=3\cdot 4^5=3072$.

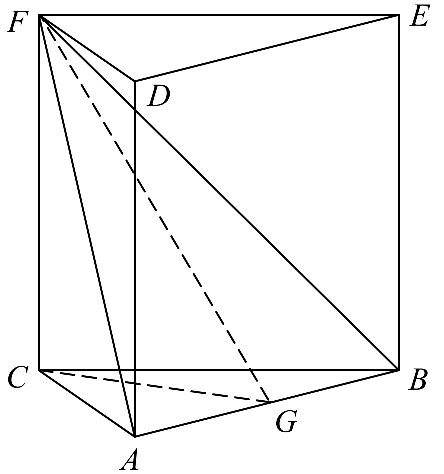
Liczba wszystkich możliwych ustawień jest sumą liczb ustawień w poszczególnych wariantach i równa się: $1024+1024+3072=5120$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Przyznajemy po **1 punkcie** za obliczenie liczby możliwych ustawień cyfr w każdym z trzech wariantów i **1 punkt** za obliczenie sumy tych możliwości.

Zadanie 34. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie objętości graniastosłupa z zastosowaniem związków miarowych w wielościanach (IV.9.b)



I sposób rozwiązania

Niech G będzie środkiem krawędzi AB. Rysujemy wysokość FG trójkąta ABF.

Pole trójkąta ABF jest równe: $P_{ABF}=\frac{|AB|\cdot|FG|}{2}=\frac{8\cdot|FG|}{2}=4\cdot|FG|=52$. Stąd $|FG|=13$.

W trójkącie równobocznym ABC mamy $|CG|=4\sqrt{3}$. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCG do obliczenia $|CF|$: $|CF|^2+|CG|^2=|FG|^2$, stąd $|CF|=11$.

Obliczamy objętość graniastosłupa: $V=\frac{|AB|^2\sqrt{3}}{4}\cdot|CF|=\frac{64\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 11=176\sqrt{3}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- Narysowanie wysokości CG trójkąta ABC i obliczenie długości odcinka CG – wysokości trójkąta równobocznego ABC, podstawy graniastosłupa prawidłowego: $|CG| = 4\sqrt{3}$

albo

- obliczenie wysokości trójkąta ABF : $|FG| = 13$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Narysowanie wysokości CG trójkąta ABC i obliczenie długości odcinka CG – wysokości trójkąta równobocznego ABC, podstawy graniastosłupa prawidłowego: $|CG| = 4\sqrt{3}$

oraz

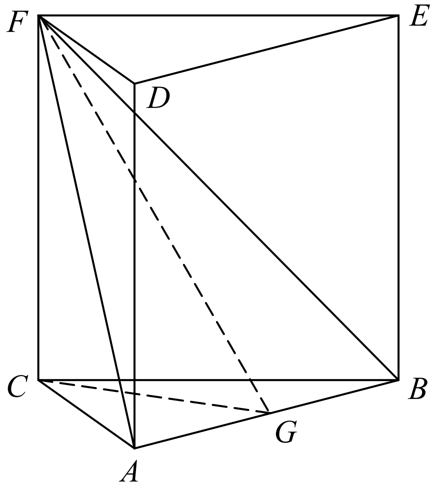
- obliczenie wysokości trójkąta ABF : $|FG| = 13$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie wysokości CF graniastosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$: $|CF| = 11$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 176\sqrt{3}$.



II sposób rozwiązania

Niech G będzie środkiem krawędzi AB. Rysujemy wysokość FG trójkąta ABF .

Pole trójkąta ABF: $P_{ABF} = \frac{|AB| \cdot |FG|}{2} = 52$, stąd $|FG| = 13$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFG i obliczamy kwadrat długości odcinka AF: $|AF|^2 = 13^2 + 4^2 = 185$.

Następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACF, aby obliczyć wysokość graniastosłupa CF: $|CF|^2 + |AC|^2 = |AF|^2$, czyli $|CF|^2 = 185 - 64 = 121$. Zatem $|CF| = 11$.

Obliczamy objętość graniastosłupa: $V = \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |CF| = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Obliczenie wysokości FG trójkąta ABF: $|FG| = 13$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 pkt

Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej lub kwadrat jej długości: $|AF|^2 = 185$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Obliczenie wysokości CF graniastosłupa: $|CF| = 11$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie objętości graniastosłupa: $V = 176\sqrt{3}$.