



|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| <i>Rodzaj dokumentu:</i>          | <b>Materiał dodatkowy</b>                                   |
| <i>Zagadnienie:</i>               | <b>Zbiór zadań z matematyki</b>                             |
| <i>Egzamin:</i>                   | <b>Egzamin maturalny</b>                                    |
| <i>Przedmiot:</i>                 | <b>Matematyka</b>   |
| <i>Poziom egzaminu:</i>           | <b>Podstawowy</b>   |
| <i>Adresaci dokumentu:</i>        | Nauczyciele matematyki<br>Uczniowie szkół ponadpodstawowych |
| <i>Data publikacji dokumentu:</i> | 7 października 2022 r.                                      |

## **Zespół redakcyjny:**

Hubert Rauch (CKE)  
Sebastian Felski (CKE)  
Mariusz Mroczek (CKE)  
Monika Nowak (CKE)  
Ewa Ludwikowska (OKE Gdańsk)  
dr Michał Krych (UW)

## **Recenzenci:**

dr Tomasz Karpowicz (recenzja językowa)  
dr hab. Jan Jakóbowski (UWM)  
Marian Pacholak (OKE Warszawa)  
dr Wioletta Kozak (CKE)  
Alicja Kwiecień (CKE)

Materiał został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

**Centralna Komisja Egzaminacyjna**  
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa  
tel. 22 536 65 00  
sekretariat@cke.gov.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku**  
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk  
tel. 58 320 55 90  
komisja@oke.gda.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie**  
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno  
tel. 32 616 33 99  
oke@oke.jaworzno.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie**  
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków  
tel. 12 683 21 99  
oke@oke.krakow.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży**  
al. Legionów 9, 18-400 Łomża  
tel. 86 473 71 20  
sekretariat@oke.lomza.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi**  
ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź  
tel. 42 634 91 33  
sekretariat@lodz.oke.gov.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu**  
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań  
tel. 61 854 01 60  
sekretariat@oke.poznan.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie**  
pl. Europejski 3, 00-844 Warszawa  
tel. 22 457 03 35  
info@oke.waw.pl

**Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu**  
ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław  
tel. 71 785 18 94  
sekretariat@oke.wroc.pl

## Spis treści

|  |           |
|--|-----------|
| Wprowadzenie.....  | 4         |
| <b>Zadania sprawdzające wymagania z podstawy programowej – poziom podstawowy ...</b> | <b>7</b>  |
| I. Liczby rzeczywiste.....   | 7         |
| II. Wyrażenia algebraiczne .....   | 13        |
| III. Równania i nierówności.....   | 19        |
| IV. Układy równań .....  | 27        |
| V. Funkcje .....   | 33        |
| VI. Ciągi.....   | 43        |
| VII. Trygonometria.....  | 51        |
| VIII. Planimetria.....   | 57        |
| IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej .....                       | 65        |
| X. Stereometria .....  | 73        |
| XI. Kombinatoryka .....  | 79        |
| XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka .....                                  | 83        |
| XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy .....                                     | 87        |
| <b>Zasady oceniania .....</b>  | <b>91</b> |
| I. Liczby rzeczywiste.....   | 92        |
| II. Wyrażenia algebraiczne .....   | 97        |
| III. Równania i nierówności.....   | 100       |
| IV. Układy równań .....  | 106       |
| V. Funkcje .....   | 112       |
| VI. Ciągi.....   | 118       |
| VII. Trygonometria.....  | 126       |
| VIII. Planimetria.....   | 130       |
| IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej .....                       | 139       |
| X. Stereometria .....  | 151       |
| XI. Kombinatoryka .....  | 154       |
| XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka .....                                  | 156       |
| XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy .....                                     | 158       |

## Wprowadzenie

Matematyka jest nauką, która stanowi istotne wsparcie dla innych dziedzin, zwłaszcza dla nauk przyrodniczych i informatycznych. Nauczanie matematyki w szkole opiera się na czterech fundamentach: nauce rozumowania matematycznego, analizie i interpretacji informacji, kształceniu sprawności rachunkowej oraz przekazywaniu wiedzy o własnościach obiektów matematycznych.

### Sprawność rachunkowa

Sprawność rachunkowa jest niezwykle ważnym elementem nauczania matematyki nawet obecnie, kiedy wiele rachunków wykonuje się za pomocą sprzętu elektronicznego. Ważnym celem ćwiczenia sprawności rachunkowej jest kształtowanie wyobrażenia o wielkościach liczb, a w konsekwencji doskonalenie umiejętności precyzyjnego szacowania wyników. Takie wyobrażenie ułatwia codzienne życie, na przykład planowanie budżetu domowego. Na wyższym poziomie, przy działaniach na wyrażeniach algebraicznych, sprawność rachunkowa pozwala doskonalić umiejętność operowania obiektami matematycznymi.

### Wykorzystanie i tworzenie informacji

Istotnym elementem edukacji matematycznej jest umiejętność analizy i interpretacji tekstu matematycznego przedstawionego w różnej formie, np. relacji, wykresów, tabel, diagramów oraz interpretacji uzyskanego wyniku, sensowności otrzymanego rozwiązania.

### Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji

Wiedza o właściwościach obiektów matematycznych pozwala na swobodne operowanie nimi i stosowanie obiektów matematycznych do opisu bądź modelowania zjawisk obserwowanych w rzeczywistości. Właściwości matematyczne modeli przekładają się często na konkretne własności obiektów rzeczywistych.

### Rozumowanie matematyczne

Rozumowanie matematyczne to umiejętność poszukiwania rozwiązania danego zagadnienia. Dobrze kształcona rozwija zdolność myślenia konstruktywnego, premiuje postępowanie nieschematyczne i twórcze. Ponadto rozumowanie matematyczne narzuca pewien rygor ścisłości: dowód matematyczny musi być poprawny. Dobrze opanowanie umiejętności rozumowania matematycznego ułatwia w życiu codziennym odróżnianie prawdy od fałszu.

Powyższe umiejętności zostały ujęte w podstawie programowej jako cele kształcenia – wymagania ogólne.

## Cele kształcenia – wymagania ogólne

- I. Sprawność rachunkowa.  
Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
  1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.
  2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
  1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
  2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
  3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.
  4. Wskazywanie konieczności lub możliwości modyfikacji modelu matematycznego w przypadkach wymagających specjalnych zastrzeżeń, dodatkowych założeń, rozważenia szczególnych uwarunkowań.
- IV. Rozumowanie i argumentacja.
  1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
  2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.
  3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia.
  4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.



## Zadania sprawdzające wymagania z podstawy programowej – poziom podstawowy

### I. Liczby rzeczywiste

#### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru I

Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
  - a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
  - b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
- 3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- 5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli  $x < y$  oraz  $a > 1$ , to  $a^x < a^y$ , zaś gdy  $x < y$  i  $0 < a < 1$ , to  $a^x > a^y$ ;
- 6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu:  $|x + 4| = 5$ ,  $|x - 2| < 3$ ,  $|x + 3| \geq 4$ ;
- 8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
- 9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

#### Komentarz

W tym dziale sprawdzana jest sprawność wykonywania działań na liczbach z uwzględnieniem ich własności i związków między nimi (potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie). Sprawdzana jest również umiejętność posługiwania się przedziałami liczbowymi. Wybrane zadania weryfikują sprawność przeprowadzenia rozumowania matematycznego, polegającego na wykazaniu podzielności liczb.

#### Pojęcia

- działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie)
- proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia
- własności pierwiastków
- związek pierwiastkowania z potęgowaniem
- własności monotoniczności potęgowania
- przedziały liczbowe
- interpretacja geometryczna i algebraiczna wartości bezwzględnej





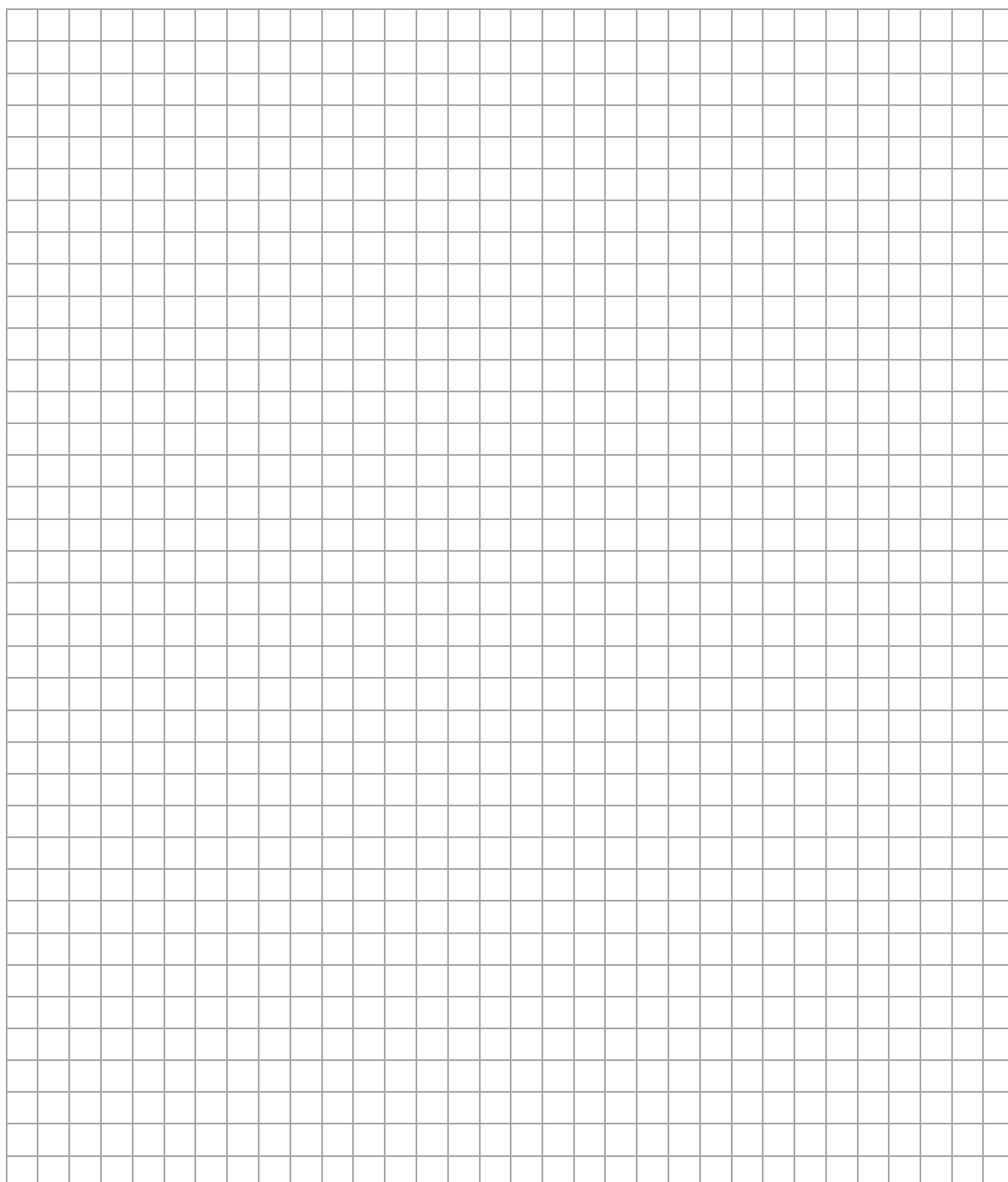
**Zadanie 3. (0–3)**

Rozważmy takie liczby rzeczywiste  $a$  i  $b$ , które spełniają warunki:

$$a \neq 0 \quad \text{oraz} \quad b \neq 0 \quad \text{oraz} \quad a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$$

Oblicz wartość liczbową wyrażenia  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ , spełniających powyższe warunki. Wynik podaj w postaci ułamka bez niewymierności w mianowniku.

Zapisz obliczenia.





**Zadanie 6. (0–2)**

Okres  $T$  drgań wahadła w pewnym zegarze dany jest wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

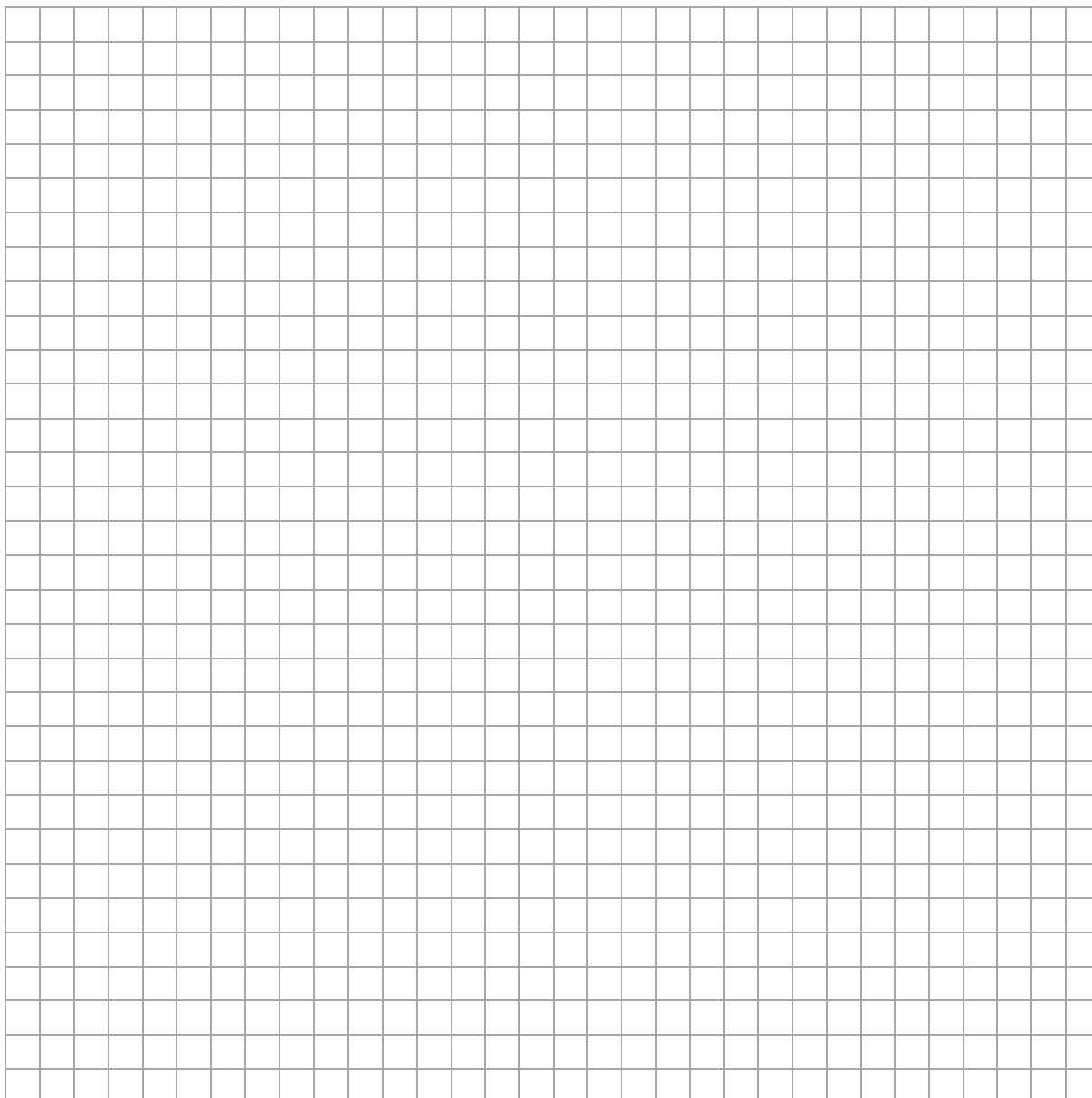
gdzie  $l$  oznacza długość wahadła, a  $g$  oznacza przyspieszenie grawitacyjne. Przyjmij do obliczeń, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi wynosi  $g_Z = 9,81 \text{ m/s}^2$ , a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi  $g_K = 1,62 \text{ m/s}^2$ .

**Oblicz  $\frac{T_K}{T_Z}$  – stosunek okresu drgań tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na**

**Księżycu, do okresu drgań tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi.**

**Wynik podaj z dokładnością do 0,01.**

**Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 7. (0–1)**

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia  $\log k + \log \frac{1}{100} k^2 - \log \frac{1}{10} k^3$ , gdzie  $k > 0$ , jest równa

- A. 0                      B. 1                      C. (-1)                      D.  $k$

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Zadanie 8. (0–2)**

Liczby rzeczywiste  $x, y, z$  spełniają następujące warunki:

$$x, y, z > 0 \quad \text{oraz} \quad x, y, z \neq 1 \quad \text{oraz} \quad y^z = x$$

Dokończ zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

Z podanych warunków wynika, że prawdziwe są równości

- A.  $\log_x y = z$                       B.  $y^{-\log_y x} = \frac{1}{x}$   
C.  $\log_x z = y$                       D.  $y^{\log_x y} = x$   
E.  $\log_y x = z$                       F.  $z^{-\log_x z} = \frac{1}{y}$

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

## II. Wyrażenia algebraiczne

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru II

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^n - b^n$ ;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
- 4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu  $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$ ;
- 5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 6) dzieli wielomian jednej zmiennej  $W(x)$  przez dwumian postaci  $x - a$ ;
- 7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;
- 8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \quad \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}.$$

#### Komentarz

W dziale tym sprawdzana jest głównie umiejętność posługiwania się wyrażeniami reprezentującymi liczby przy użyciu zmiennych. Zadania sprawdzają m. in. sprawność posługiwania się wzorami skróconego mnożenia, jak również działania na wielomianach oraz wyrażeniach wymiernych.

#### Pojęcia

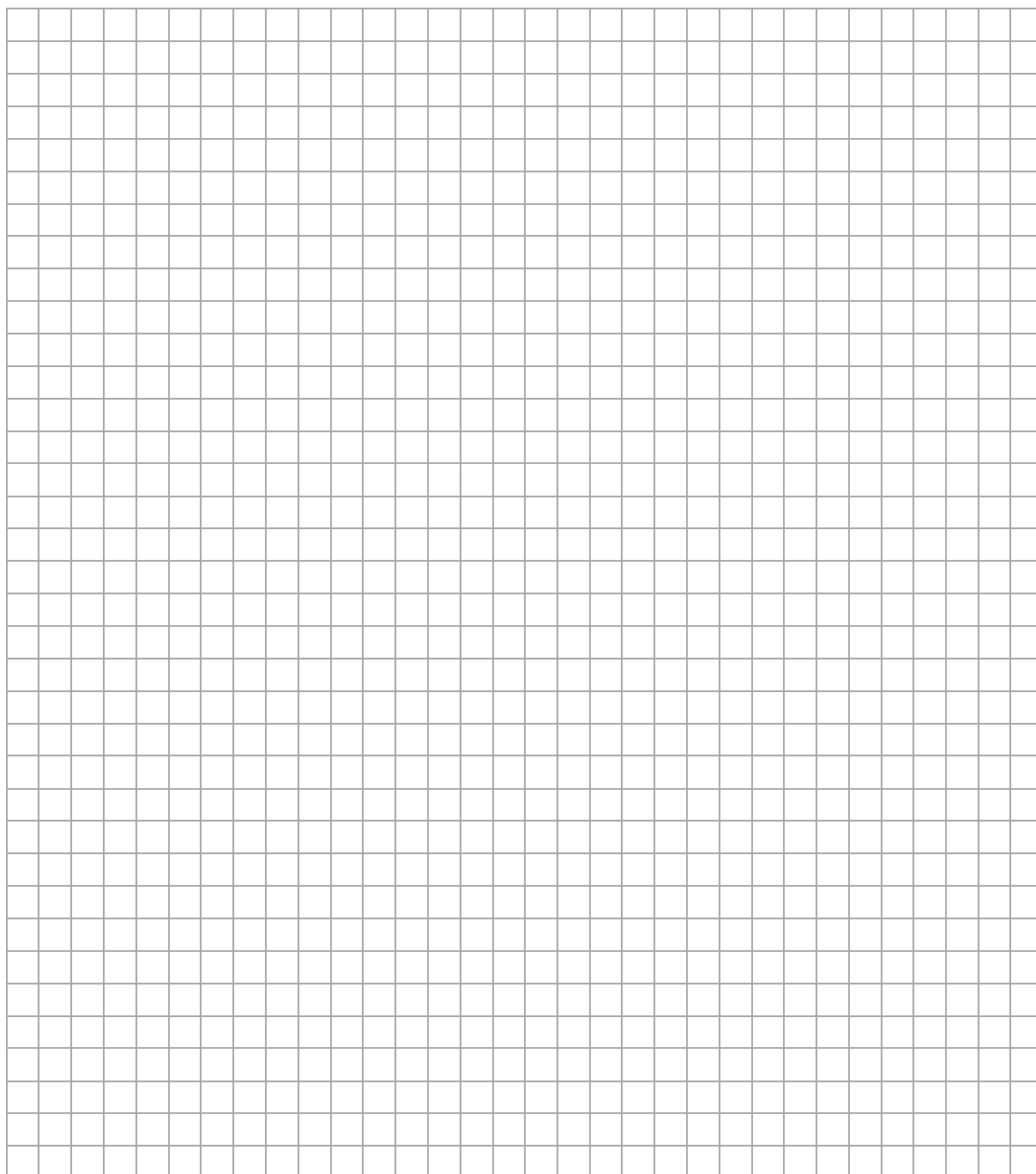
- wzory skróconego mnożenia
- wielomian
- suma algebraiczna
- rozkład wielomianu na czynniki
- pierwiastki całkowite wielomianu
- dzielenie wielomianu przez dwumian  $x - a$
- wyrażenia wymierne



**Zadanie 11. (0–3)**

Dane jest wyrażenie

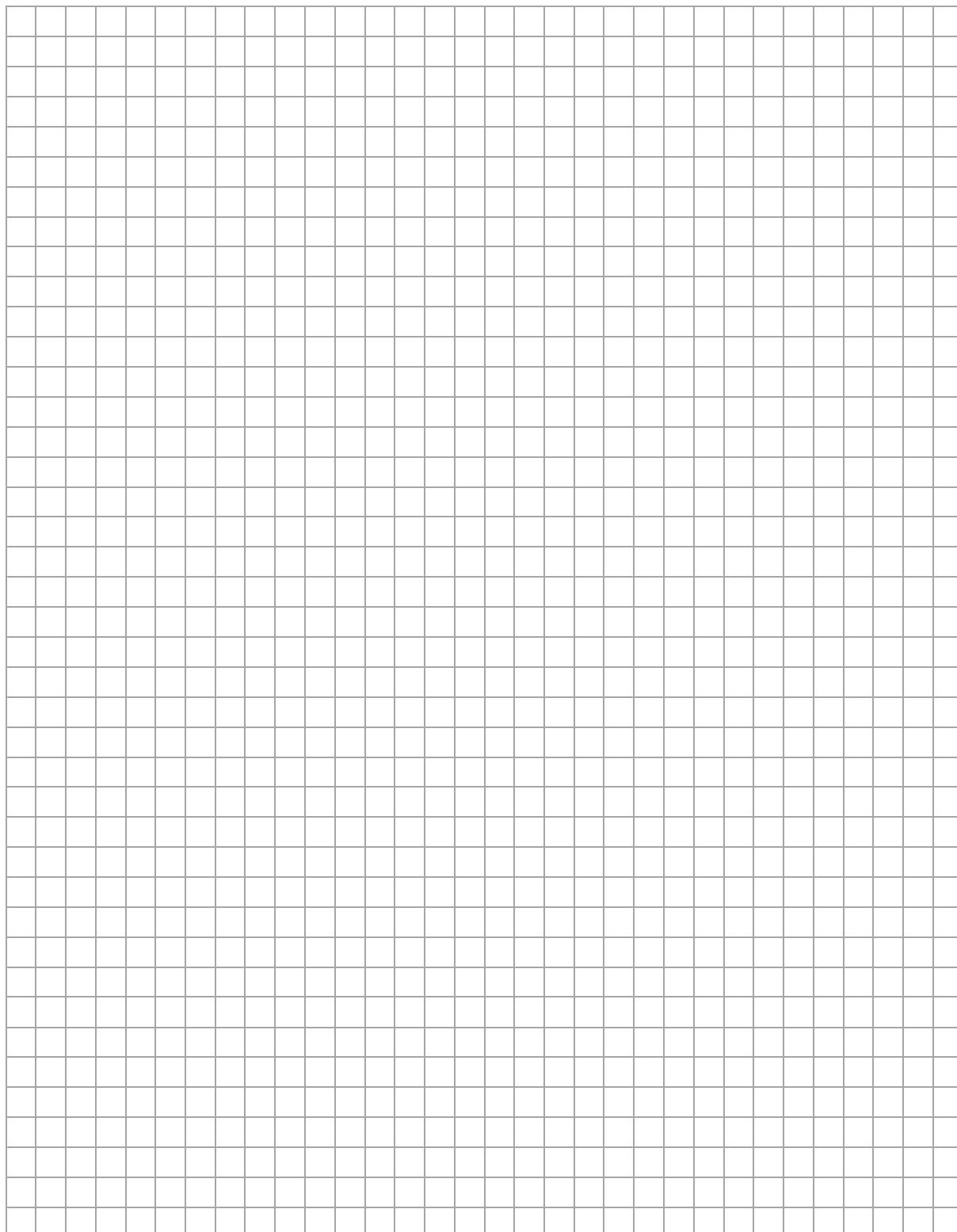
$$\left( \frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) : \left( \frac{a-b}{a^2-b^2} \right)$$

gdzie  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ ,  $a \neq -b$ .**Przekształć dane wyrażenie do najprostszej postaci i oblicz jego wartość****dla  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  oraz  $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Zapisz obliczenia.**

**Zadanie 12. (0–2)**

Wyrażenie wymierne  $\frac{2}{x-3} + 5$  można przekształcić równoważnie do wyrażenia  $\frac{ax+b}{cx+d}$ ,  
gdzie  $a, b, c, d$  są pewnymi współczynnikami rzeczywistymi.

**Wyznacz wartości liczbowe współczynników  $a, b, c, d$ . Zapisz obliczenia.**









### III. Równania i nierówności

#### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru III

Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- 5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci  $W(x) = 0$  dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- 7) rozwiązuje równania wymierne postaci  $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$ , gdzie wielomiany  $V(x)$  i  $W(x)$  są zapisane w postaci iloczynowej.

#### **Komentarz**

Dział ten skupia zadania weryfikujące sprawność przekształcania równań i nierówności w sposób równoważny, jak również interpretowania równań i nierówności sprzecznych oraz tożsamościowych. Sprawdzana jest między innymi umiejętność rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych oraz równań wielomianowych i wymiernych.

#### **Pojęcia**

- równania i nierówności liniowe
- równania i nierówności kwadratowe
- równania wielomianowe
- równania wymierne

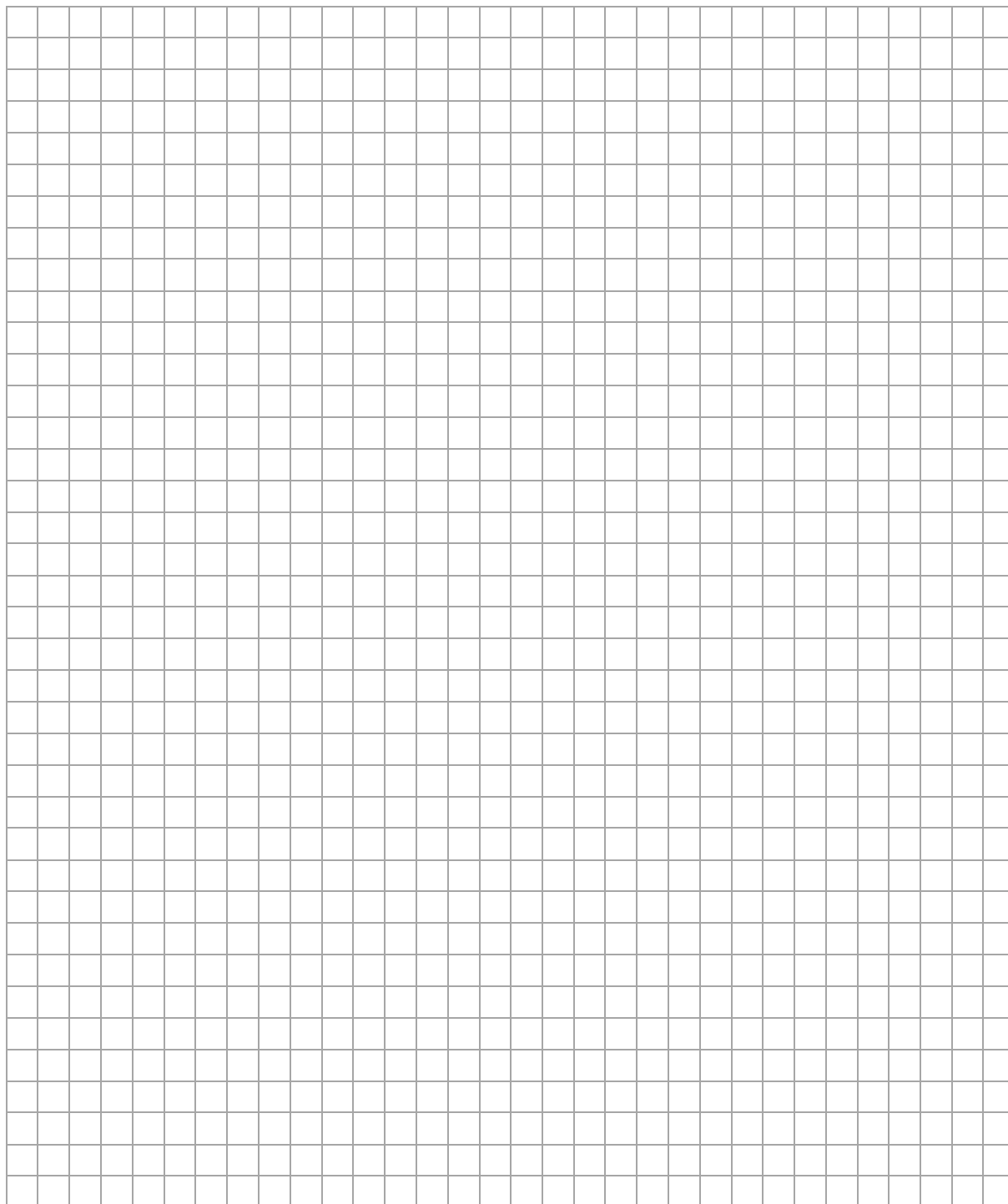
**Zadania sprawdzające wymagania z obszaru III**

**Zadanie 14. (0–2)**

Rozwiąż nierówność. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

$$2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$$

Zapisz obliczenia.

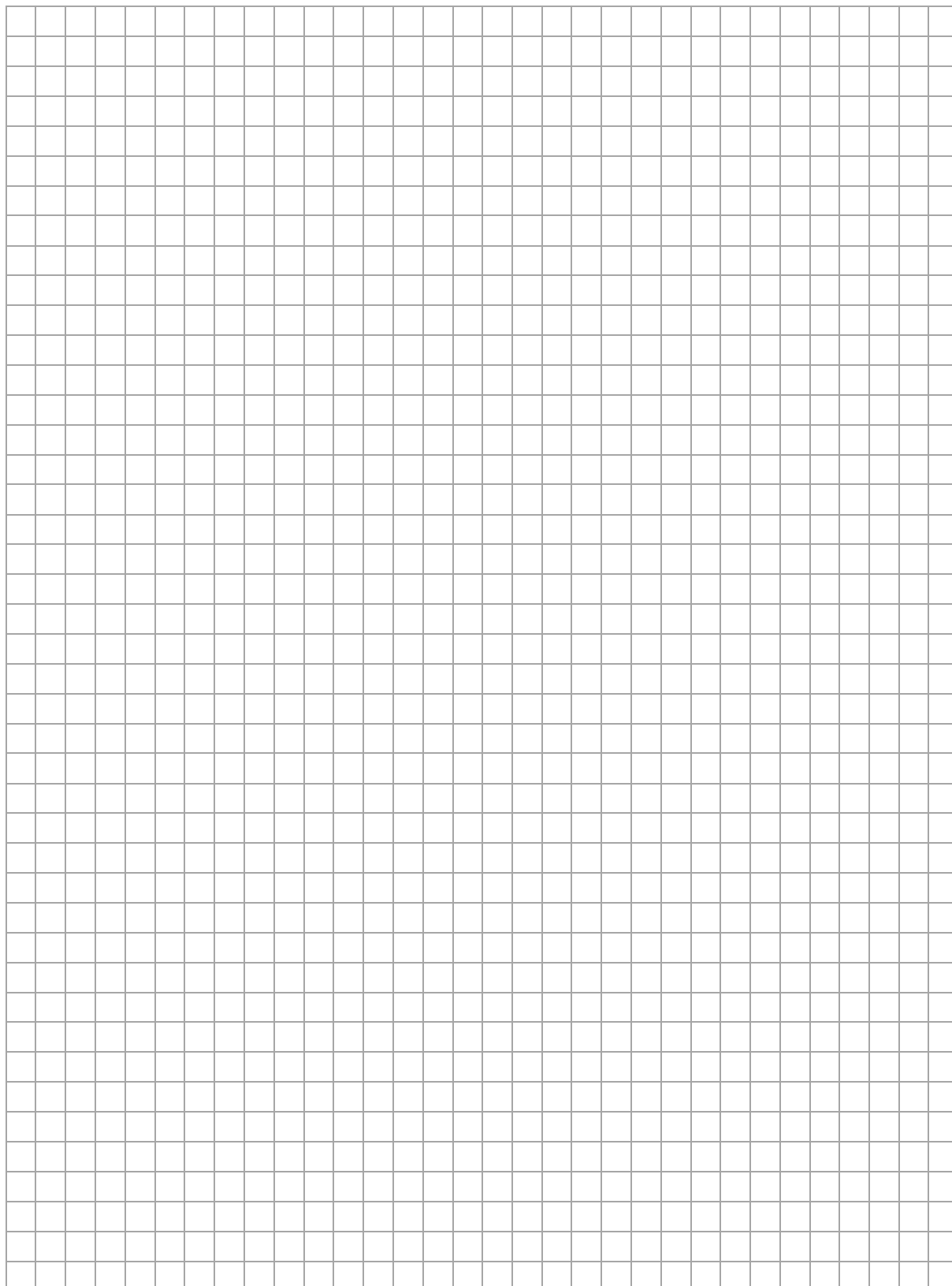
A large grid for writing calculations, consisting of 30 columns and 30 rows of small squares.

**Zadanie 15. (0–2)**

Rozwiąż równanie

$$-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$$

Zapisz obliczenia.

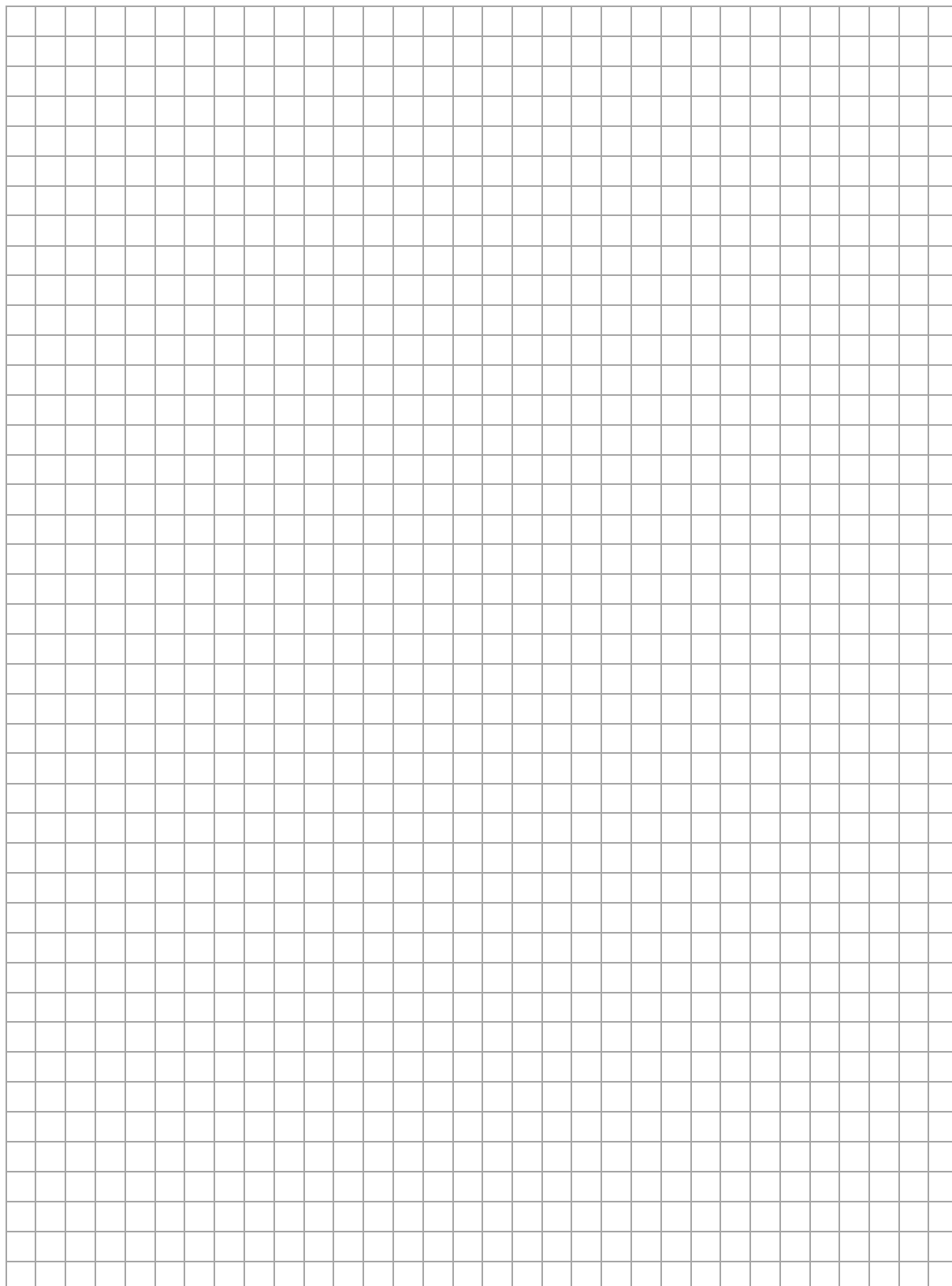


**Zadanie 16. (0–3)**

Rozwiąż równanie

$$-x^3 + 13x - 12 = 0$$

Zapisz obliczenia.





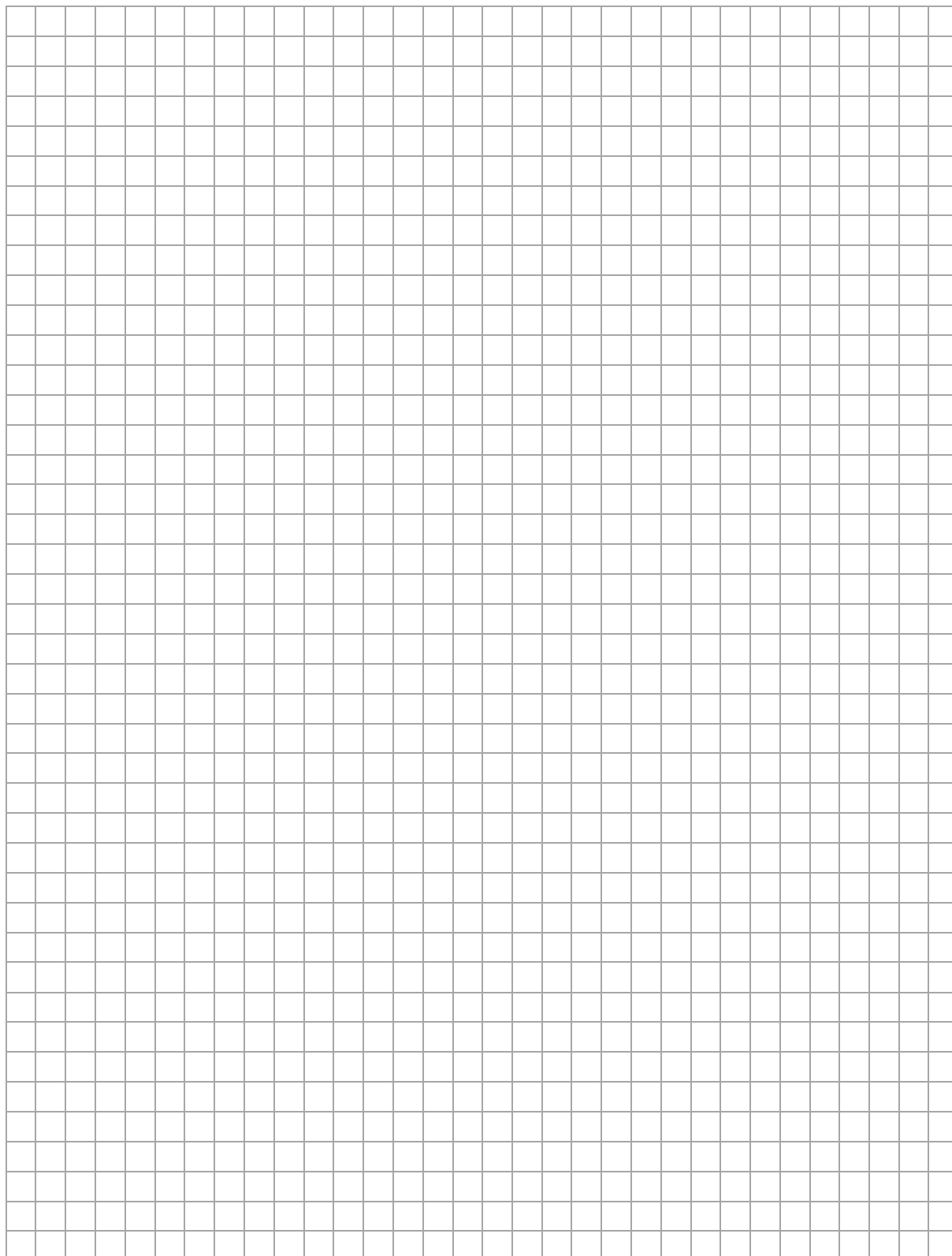




**Zadanie 19. (0–2)**

Niech  $\frac{m}{n}$  będzie ułamkiem nieskracalnym. Jeśli do licznika dodamy 6, a do mianownika dodamy 15, jego wartość nie zmieni się.

**Oblicz liczby  $m$  i  $n$ . Zapisz obliczenia.**





## IV. Układy równań

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru IV

Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
- 3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci  $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$  lub  $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$

#### **Komentarz**

Podstawową umiejętnością sprawdzaną w tym dziale jest rozwiązywanie układów równań z dwiema niewiadomymi z uwzględnieniem interpretacji geometrycznej układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych. Weryfikowana jest umiejętność samodzielnego budowania układów równań przy rozwiązywaniu zadań tekstowych.

#### **Pojęcia**

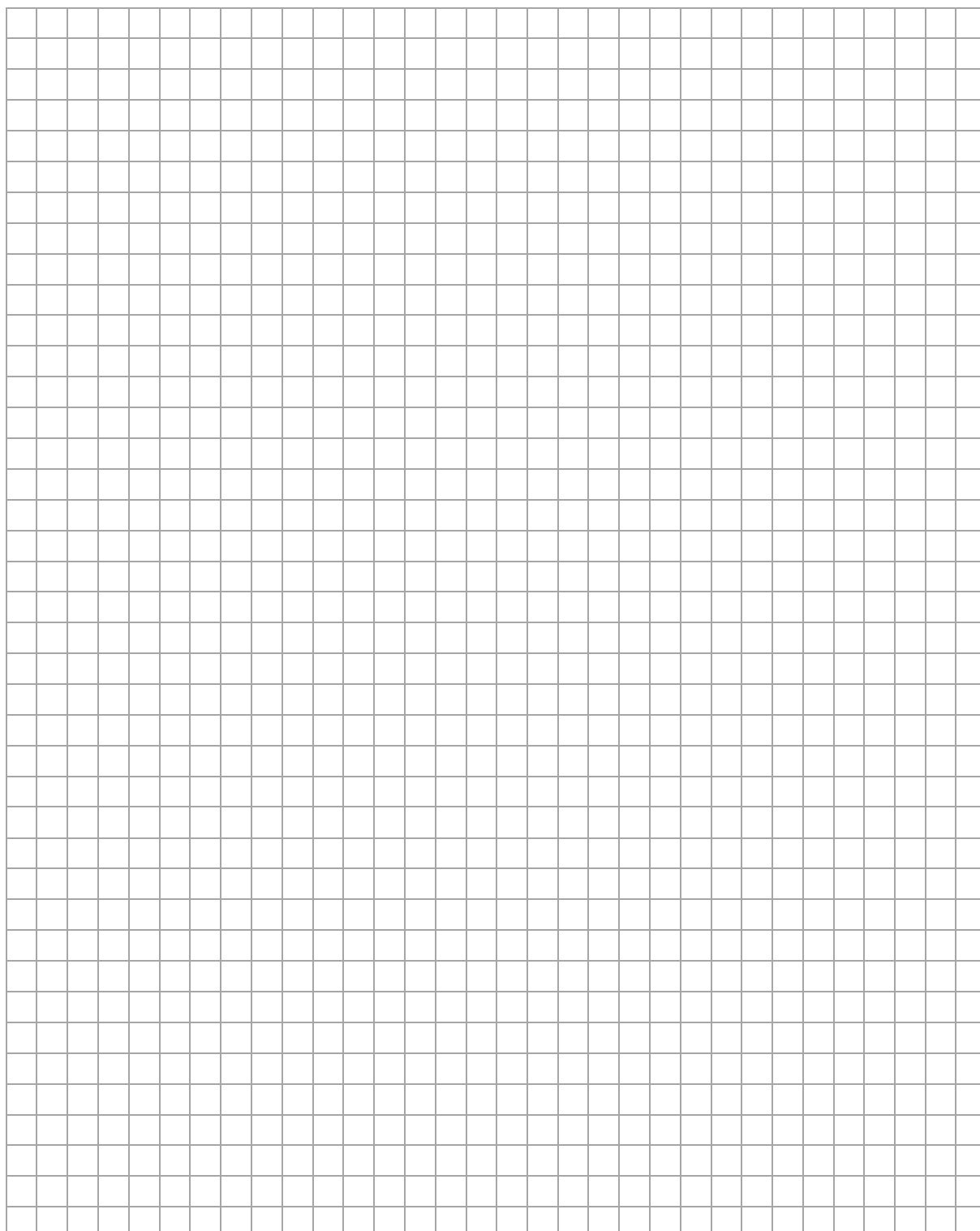
- układy równań z dwiema niewiadomymi
- interpretacja geometryczna
- zadania tekstowe

**Zadania sprawdzające wymagania z obszaru IV**

**Zadanie 20. (0–2)**

Dana jest liczba dwucyfrowa  $a$ , w której suma cyfr jest równa 14. Jeżeli zamienimy miejscami jej cyfry, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od liczby sprzed tej zamiany cyfr.

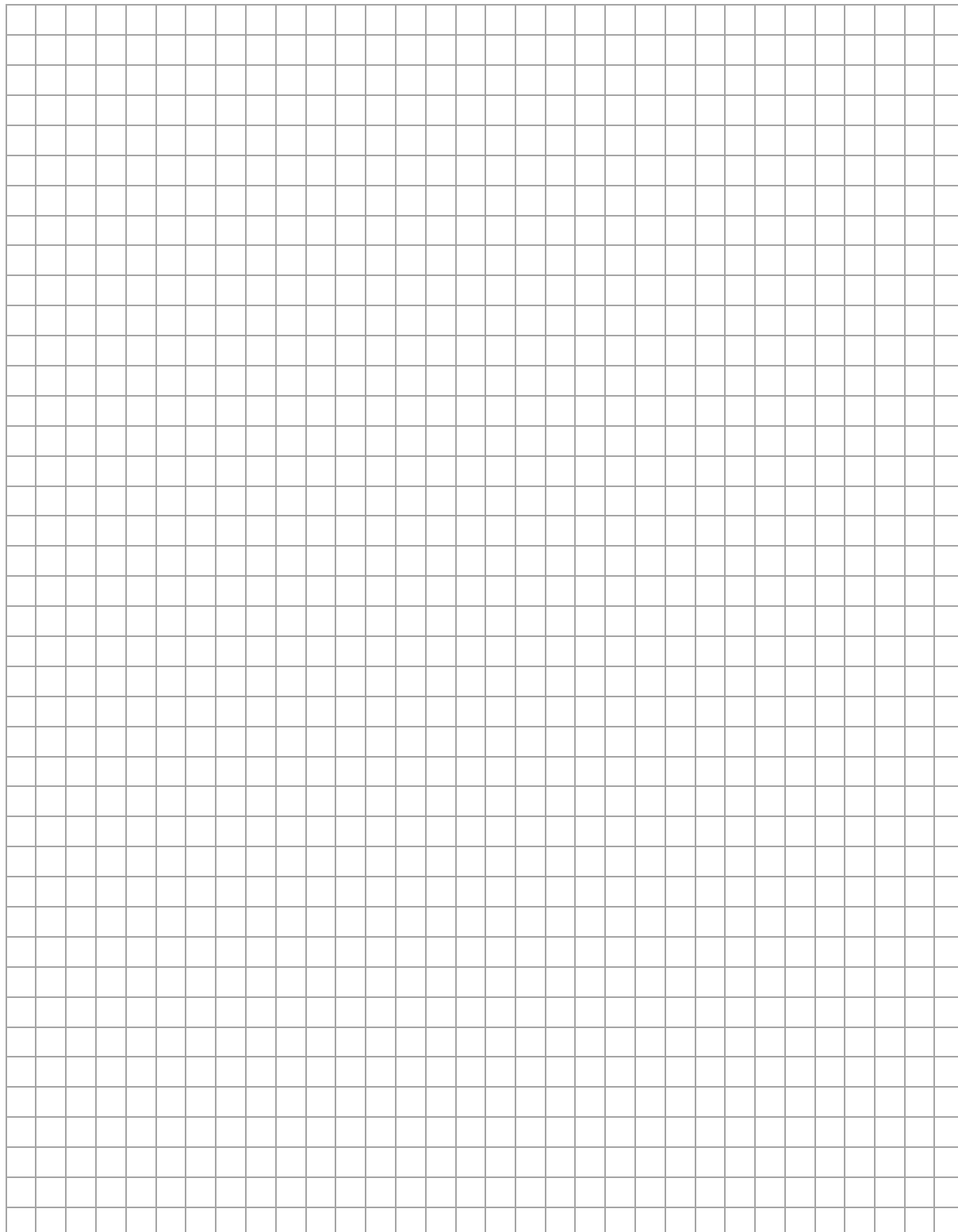
**Oblicz liczbę  $a$ . Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 21. (0–3)**

Pies goni lisa. Początkowa odległość między zwierzętami równa była 30 m. Długość każdego skoku psa jest równa 2 m, długość każdego skoku lisa jest równa 1 m. W czasie, w którym lis wykonuje trzy skoki, pies skacze dwa razy.

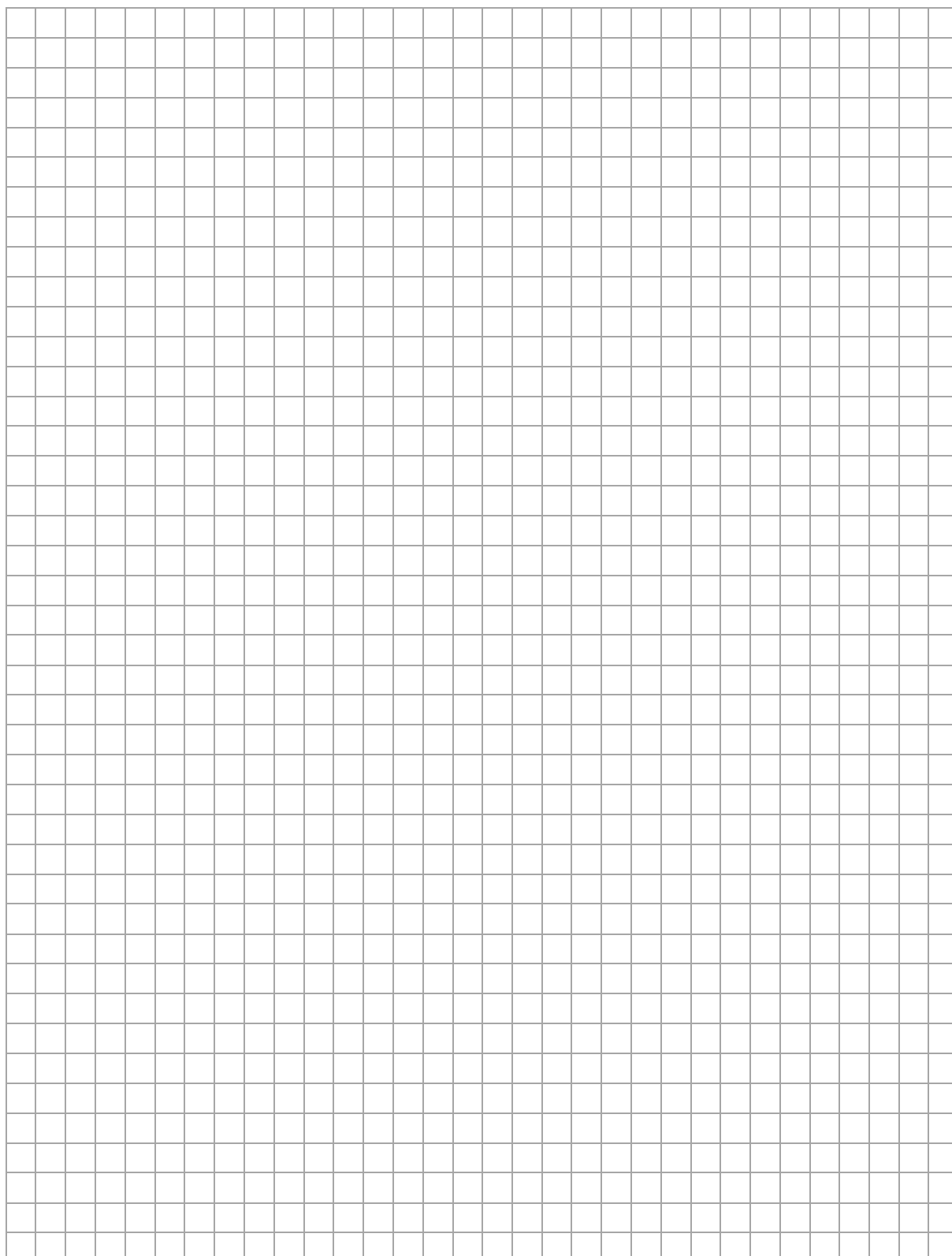
**Oblicz dystans, po przebiegnięciu którego pies dogoni lisa. Zapisz obliczenia.**

A large grid for writing calculations, consisting of 20 columns and 30 rows of small squares.

**Zadanie 22. (0–2)**

Suma liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  równa jest 527. Wiemy, że 8% liczby  $a$  jest równe 7,5% liczby  $b$ .

**Oblicz liczby  $a$  i  $b$ . Zapisz obliczenia.**

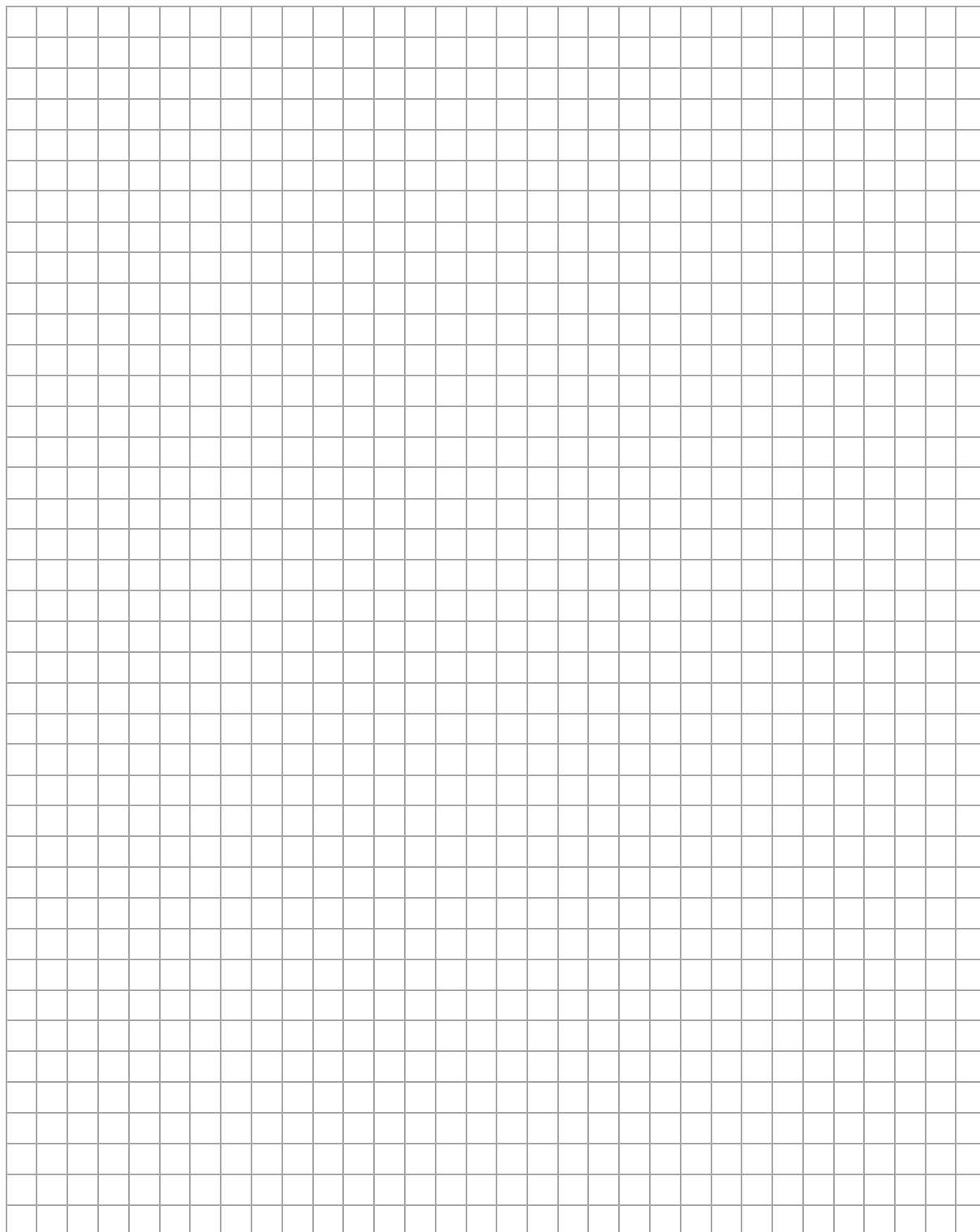


Zadanie 23. (0–4)

PP

Rozwiąż układ równań  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

Zapisz obliczenia.



PP

Zadanie sprawdza wymaganie IV.3 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.





## V. Funkcje

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru V

Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
- 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
- 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
- 12) na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  szkicuje wykresy funkcji  $y = f(x - a)$ ,  $y = f(x) + b$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$
- 13) posługuje się funkcją  $f(x) = \frac{a}{x}$ , w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- 14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

#### Komentarz

Funkcje to dział, w którym weryfikowana jest sprawność odczytywania i interpretowania danych przedstawionych w różnych postaciach: wzoru, wykresu, tabeli, opisu słownego. Sprawdzana jest umiejętność wyznaczania wzoru funkcji liniowej i kwadratowej na podstawie zebranych danych, wskazywania wartości najmniejszej i największej oraz szkicowanie wykresów. Wybrane zadania testują biegłość posługiwania się funkcją wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

### Pojęcia

- przyporządkowanie
- dziedzina funkcji
- zbiór wartości funkcji
- miejsca zerowe
- przedziały monotoniczności
- wartości najmniejsze i największe
- funkcja liniowa
- funkcja kwadratowa
- funkcja  $f(x) = \frac{a}{x}$
- funkcja wykładnicza
- funkcja logarytmiczna
- przekształcenia wykresów funkcji







**Zadanie 26.**

Temperatura powietrza obniża się wraz ze wzrostem wysokości n.p.m. Na podstawie danych empirycznych stwierdzono, że temperatura maleje o  $0,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ , gdy wysokość wzrasta o  $100\text{ m}$ , a gdy wysokość maleje o  $100\text{ m}$  – temperatura rośnie o  $0,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

W Zakopanem, które znajduje się na wysokości  $1000\text{ metrów n.p.m.}$ , temperatura powietrza zmierzona w punkcie pomiarowym była równa  $13\text{ }^{\circ}\text{C}$ . W tym samym czasie dokonano pomiarów temperatury powietrza w Białce Tatrzańskiej i na Rysach.

**Zadanie 26.1. (0–1)**

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz **P**, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

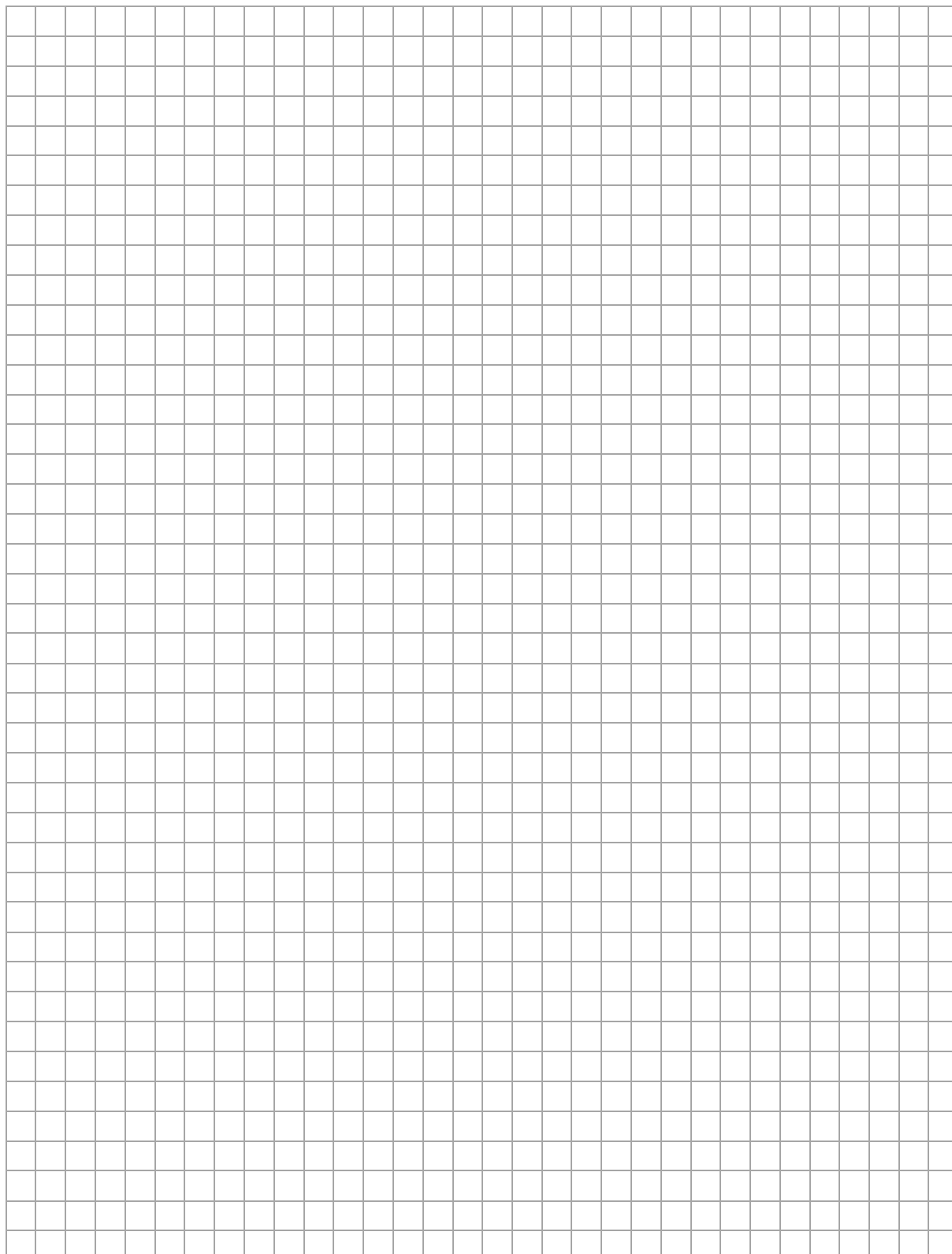
|  |          |          |
|--|----------|----------|
| Na Rysach, na wysokości $2499\text{ metrów n.p.m.}$ , zmierzona temperatura powietrza nie przekraczała $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ . | <b>P</b> | <b>F</b> |
| W Białce Tatrzańskiej ( $650\text{ metrów n.p.m.}$ ) zmierzona temperatura powietrza była równa $16,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .     | <b>P</b> | <b>F</b> |

*Brudnopis*

**Zadanie 26.2. (0–2)**

Niech  $f(x) = ax + b$  będzie funkcją opisującą zależność temperatury powietrza od wysokości  $x$  n.p.m. w dowolnym punkcie nad Zakopanem.

**Oblicz wartość współczynnika  $a$  i wartość współczynnika  $b$ . Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 27. (0–1)**

Funkcja kwadratowa  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = -2x^2 + bx + c$  i przyjmuje wartości dodatnie tylko dla  $x \in (-4, 2)$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

|   |   |   |
|---|---|---|
| Oś symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta $x = 1$ .     | P | F |
| Postać iloczynowa funkcji $f$ wyraża się wzorem $f(x) = -2(x + 4)(x - 2)$ . | P | F |

**Zadanie 28. (0–2)**

Dana jest funkcja kwadratowa  $f$ . Do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych  $(0, 8)$ , a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu  $x = 4$ . Jednym z miejsc zerowych funkcji  $f$  jest  $x_1 = 2$ .

Wyznacz i zapisz wzór funkcji  $y = f(x)$  w postaci iloczynowej.







## VI. Ciągi

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru VI

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:
  - a) 
$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1 - a_n) \end{cases}$$
  - b) 
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

#### Komentarz

Wybrane zadania z tego działu testują umiejętność sprawdzania, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, czy ciąg jest rosnący czy malejący. Sprawdzana jest znajomość następujących zagadnień związanych z ciągiem arytmetycznym oraz ciągiem geometrycznym:  $n$ -ty wyraz ciągu, suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu. Weryfikowana jest umiejętność wykorzystywania własności ciągów do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

#### Pojęcia

- wyraz ogólny
- ciąg rosnący, ciąg malejący
- ciąg arytmetyczny
- ciąg geometryczny
- $n$ -ty wyraz ciągu
- suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu

**Zadania sprawdzające wymagania z obszaru VI**

**Zadanie 30. (0–1)**

Dane są liczby:  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 4$ ,  $c = 4\sqrt{2}$ .

**Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.**

Liczby  $a$ ,  $b$  oraz  $c$  tworzą w podanej kolejności

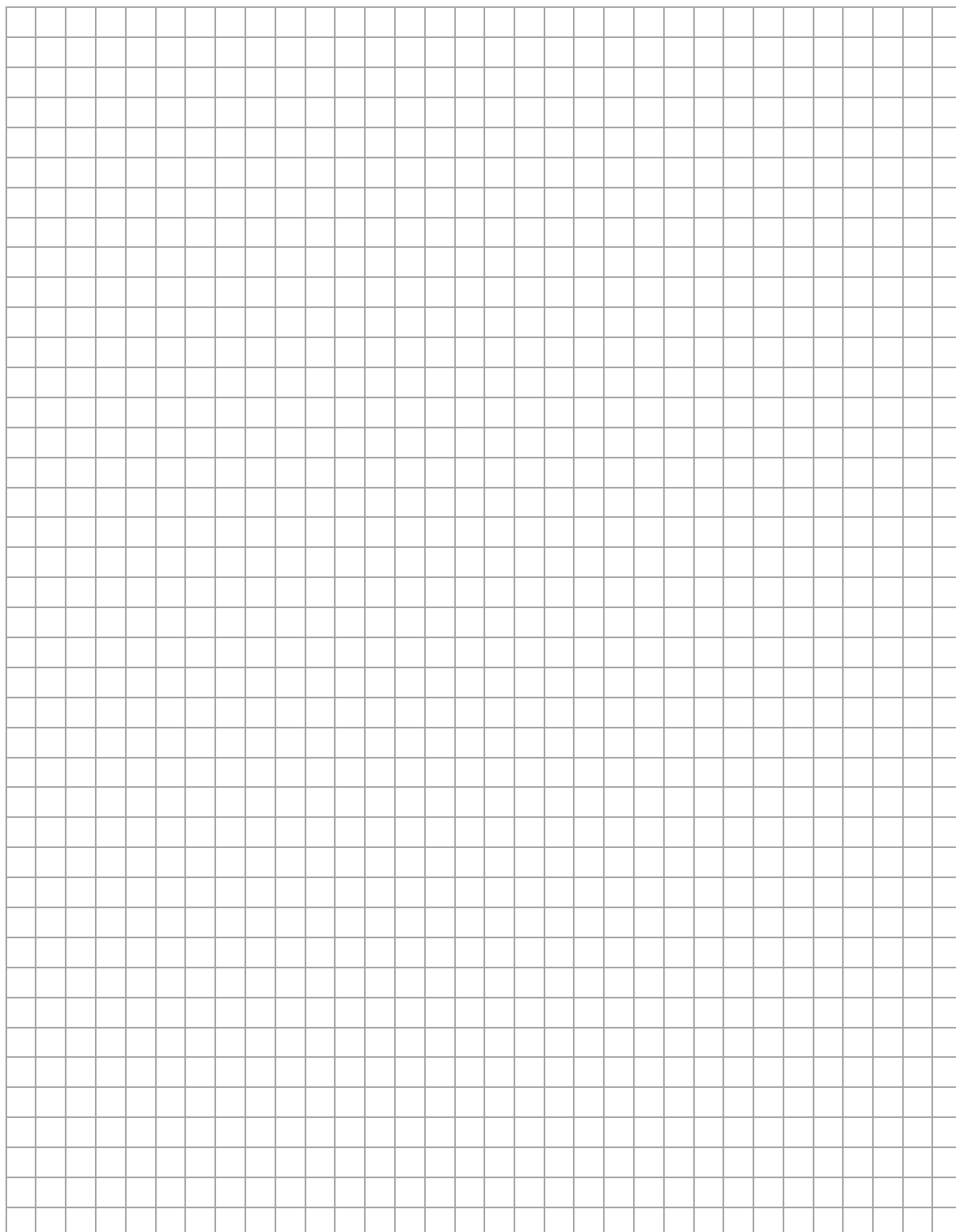
|           |                    |          |           |                           |
|-----------|--------------------|----------|-----------|---------------------------|
| <b>A.</b> | ciąg arytmetyczny, | ponieważ | <b>1.</b> | $b = \frac{a + c}{2}$     |
|           |                    |          | <b>2.</b> | $b = \frac{(c - a)^2}{2}$ |
| <b>B.</b> | ciąg geometryczny, |          | <b>3.</b> | $b^2 = a \cdot c$         |

*Brudnopis*

**Zadanie 31. (0–2)**

Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$  określony dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 1$ . Jego różnica jest równa 4, a suma jego pierwszych pięciu wyrazów jest trzy razy mniejsza od sumy następujących pięciu wyrazów.

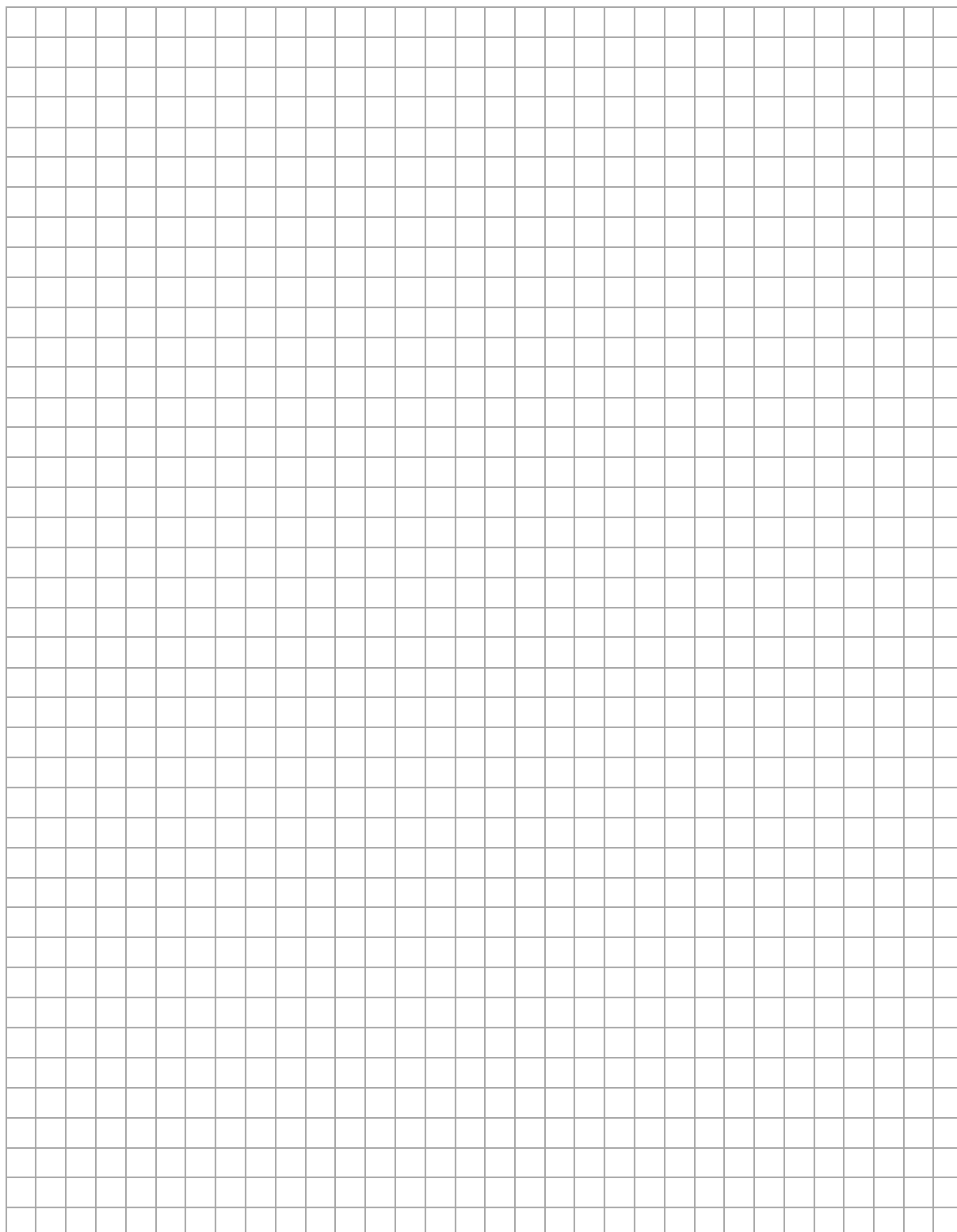
**Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 32. (0–3)**

Iloraz skończonego ciągu geometrycznego jest równy  $\frac{1}{3}$ , trzeci wyraz tego ciągu jest równy  $\frac{1}{9}$ , a suma wszystkich wyrazów to  $\frac{364}{243}$ .

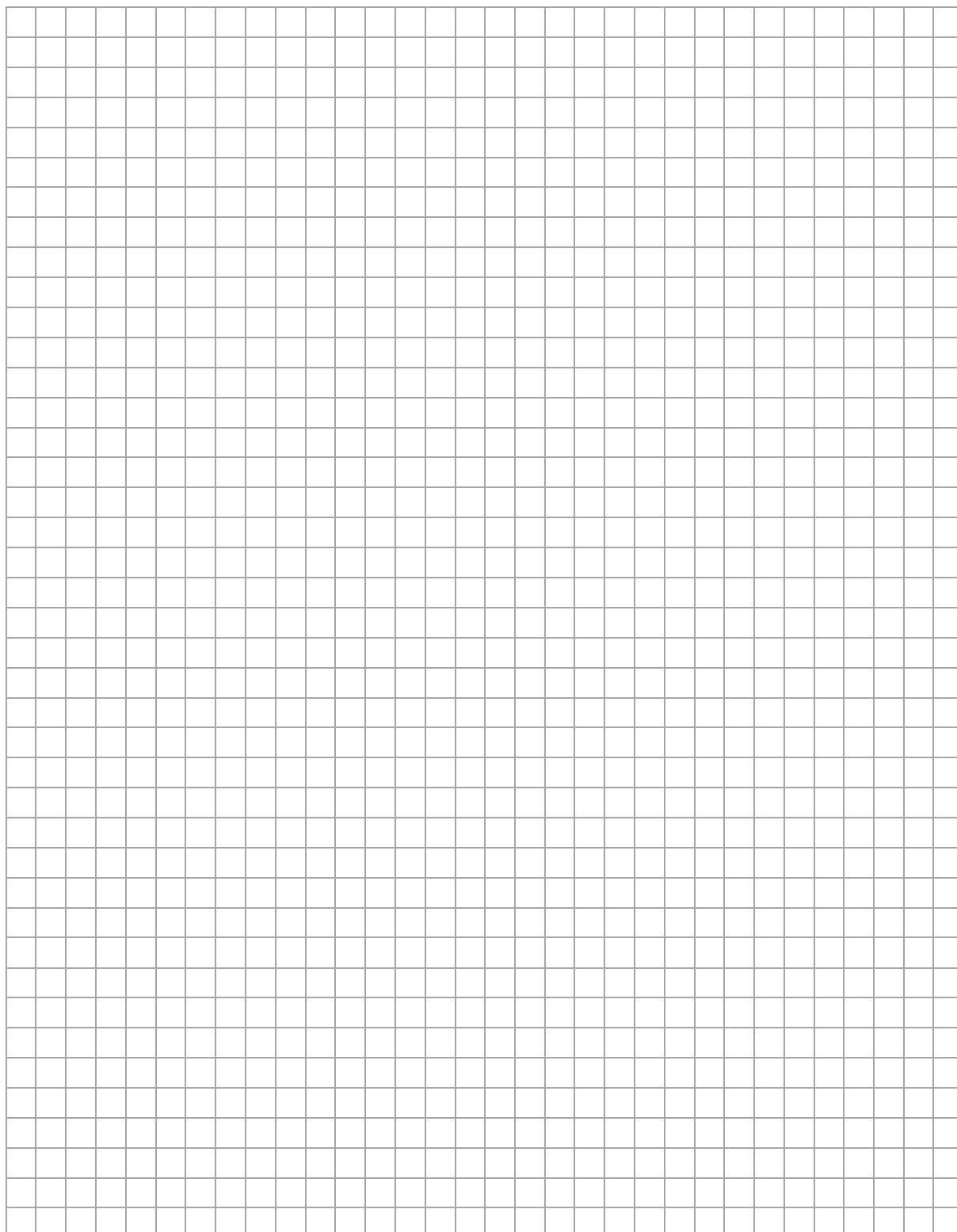
**Oblicz, z ilu wyrazów składa się ten ciąg. Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 33. (0–4)**

Liczby  $x, y, z$ , których suma jest równa 114, tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Liczby te są również wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , gdzie  $n \geq 1$ , w którym  $x = a_1$ ,  $y = a_4$  i  $z = a_{25}$ .

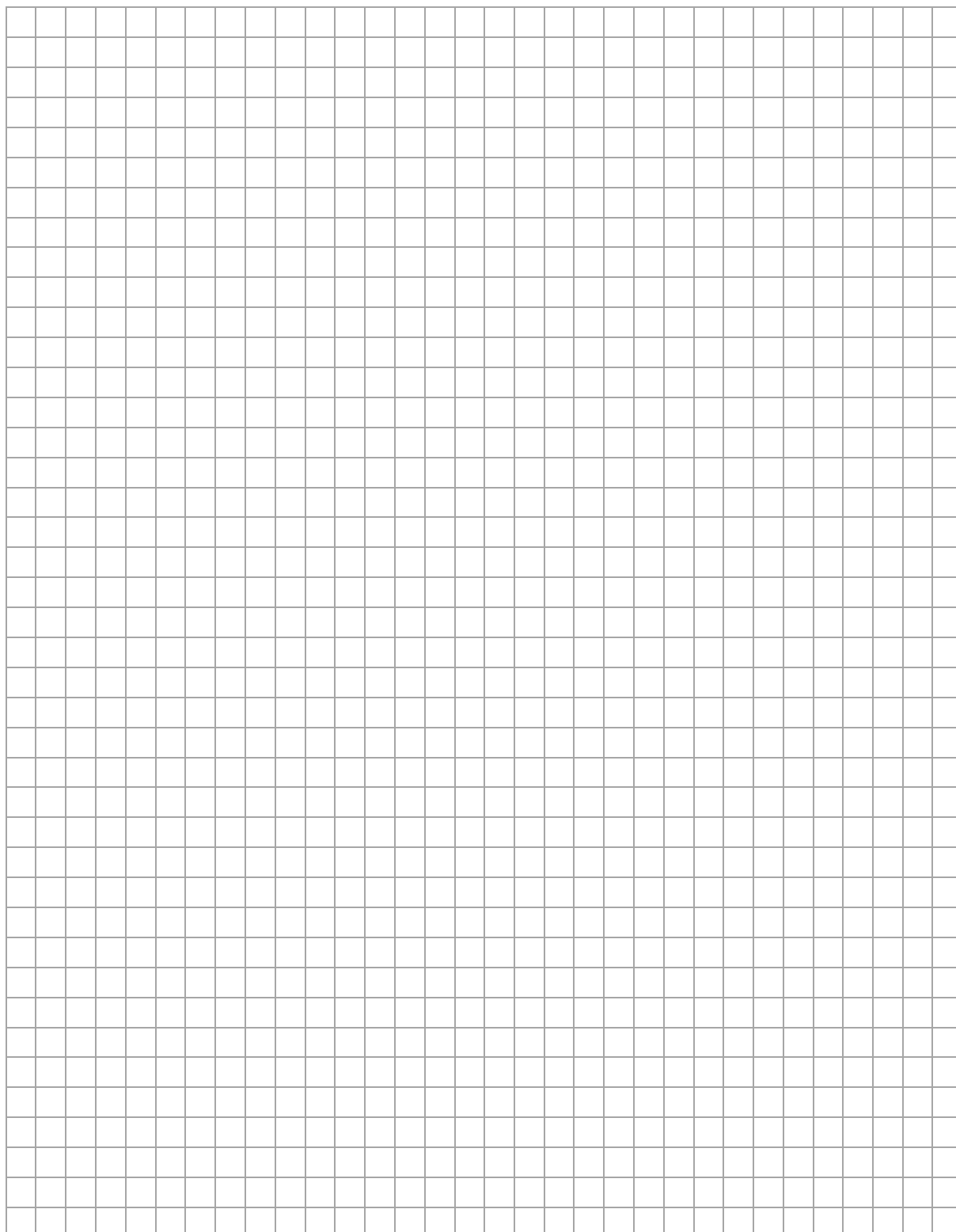
**Oblicz liczby  $x, y, z$ . Zapisz obliczenia.**



**Zadanie 34. (0–4)**

Trzy liczby, których suma jest równa 24, tworzą ciąg arytmetyczny. Po zwiększeniu ich odpowiednio o 4, 10 i 40 będą w tej samej kolejności tworzyły ciąg geometryczny.

**Oblicz te trzy liczby tworzące ciąg arytmetyczny. Zapisz obliczenia.**









## VII. Trygonometria

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru VII

Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
- 2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
- 3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
- 4) korzysta z wzorów  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ;
- 5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta;
- 6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

#### Komentarz

W zadaniach tego działu sprawdzana jest znajomość definicji funkcji sinus, cosinus oraz tangens dla kątów o mierze od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ . Testowana jest umiejętność wykorzystania dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  oraz przybliżonych wartości innych kątów odczytanych z tablic lub obliczonych na kalkulatorze. Kolejną umiejętnością weryfikowaną przez zadania z tego działu jest sprawność posługiwania się wzorami trygonometrycznymi oraz umiejętność wykorzystania twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. Funkcje trygonometryczne wykorzystywane są między innymi do obliczania kątów trójkąta i długości jego boków.

#### Pojęcia

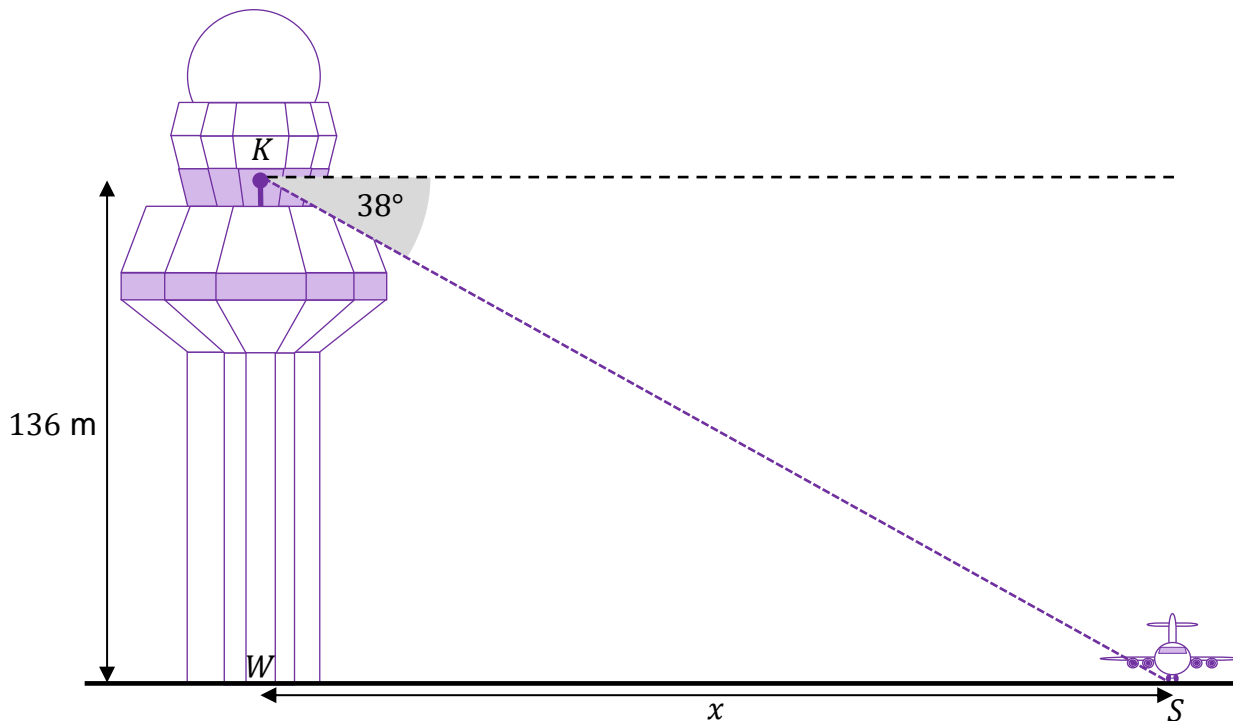
- sinus, cosinus, tangens dla kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$
- dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$
- przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych z tablic lub kalkulatora
- twierdzenie sinusów
- twierdzenie cosinusów

Zadania sprawdzające wymagania z obszaru VII

Zadanie 36. (0–3)

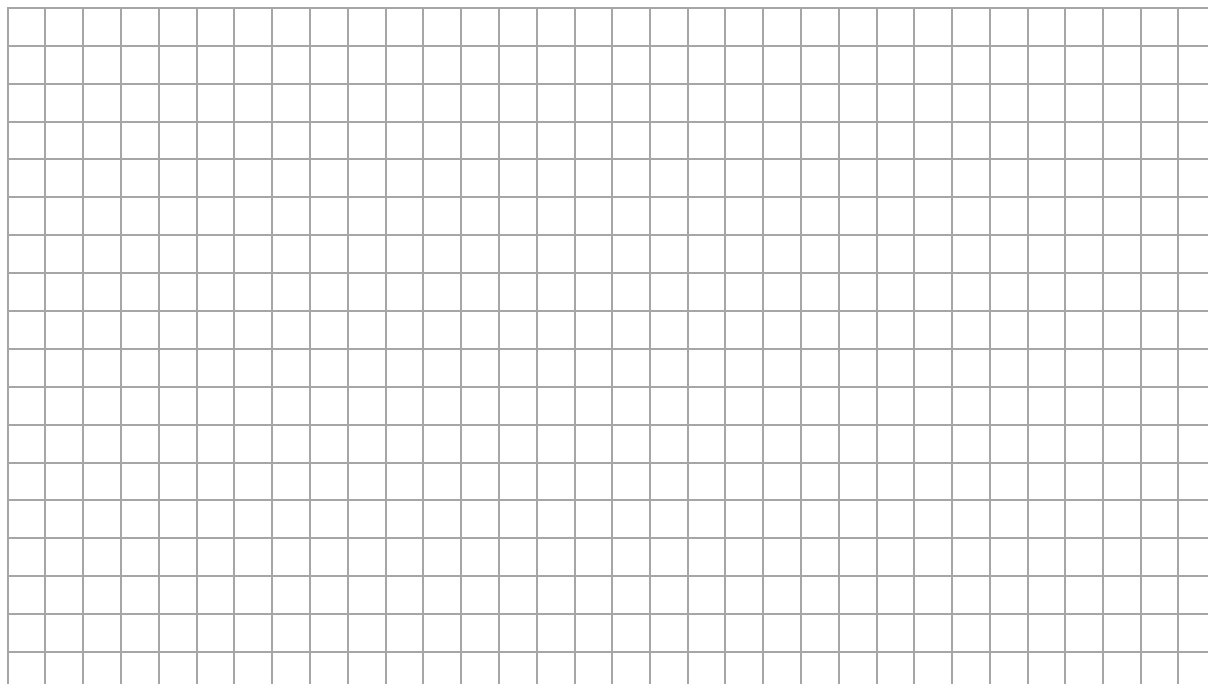
PP

Z okna wieży kontroli lotów widać startujący samolot  $S$  pod kątem  $38^\circ$  do poziomu. Kontroler  $K$  znajduje się na wysokości 136 m od płyty lotniska (zobacz rysunek).



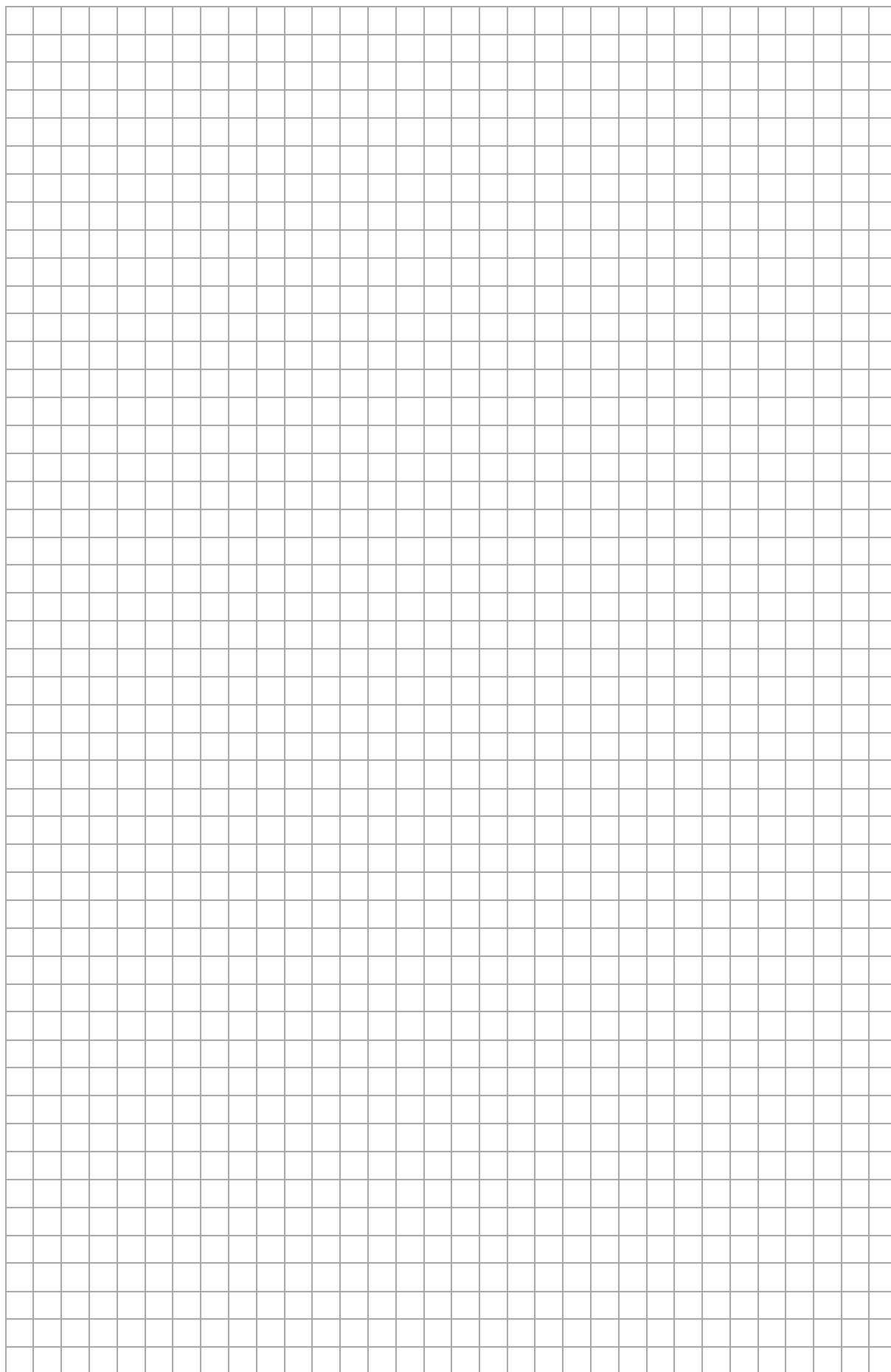
Oblicz odległość  $x$  samolotu  $S$  od podstawy  $W$  tej wieży.

Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych metrów. Zapisz obliczenia.



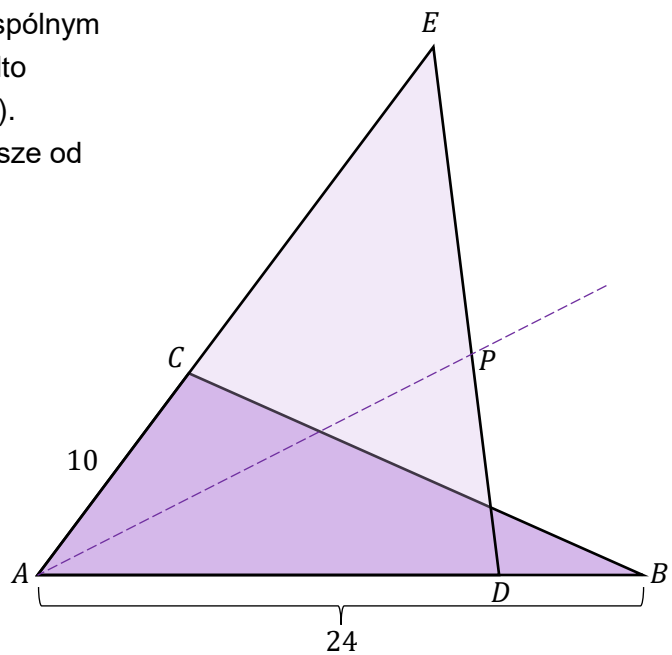
PP

Zadanie sprawdza wymaganie VII.2 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.



**Zadanie 37.**

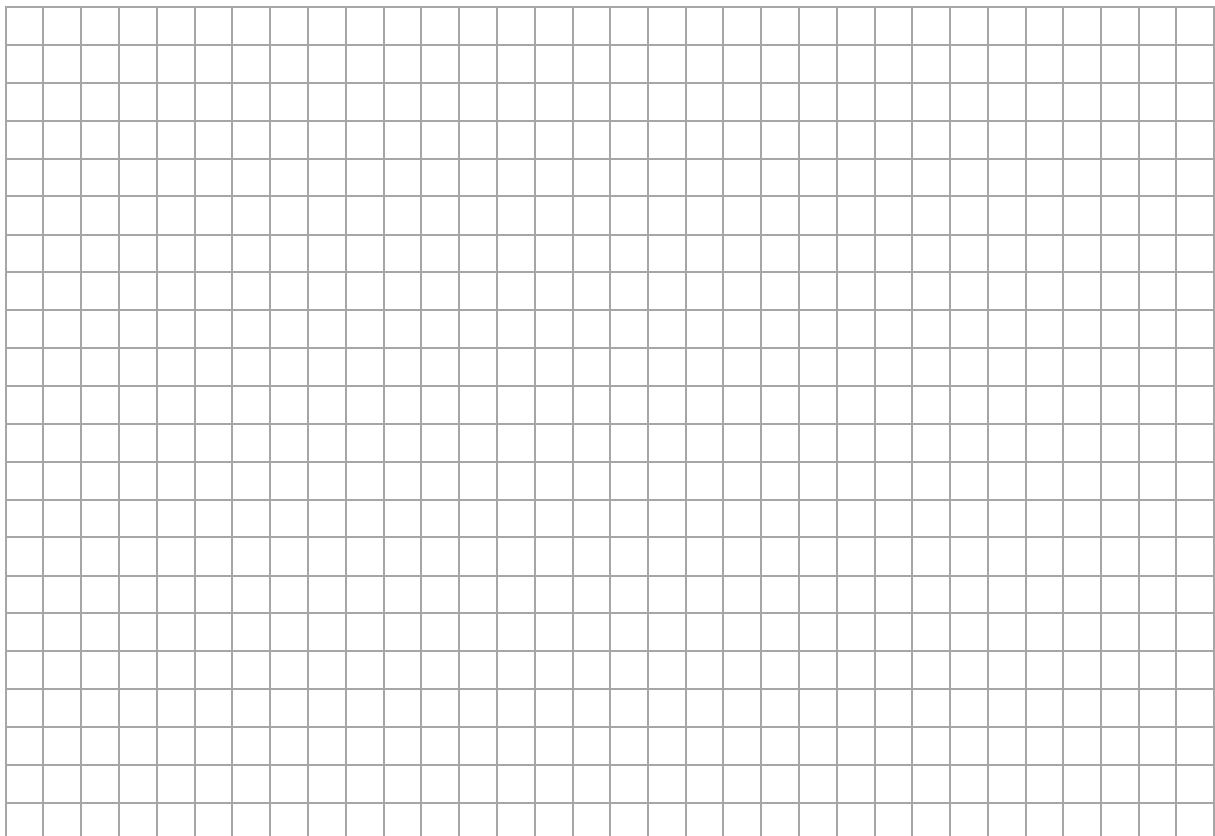
Dane są dwa trójkąty  $ABC$  i  $ADE$  o wspólnym kącie ostrym przy wierzchołku  $A$ . Ponadto  $|AB| = 24$ ,  $|AC| = 10$  (zobacz rysunek). Pole trójkąta  $ADE$  jest dwukrotnie większe od pola trójkąta  $ABC$ .

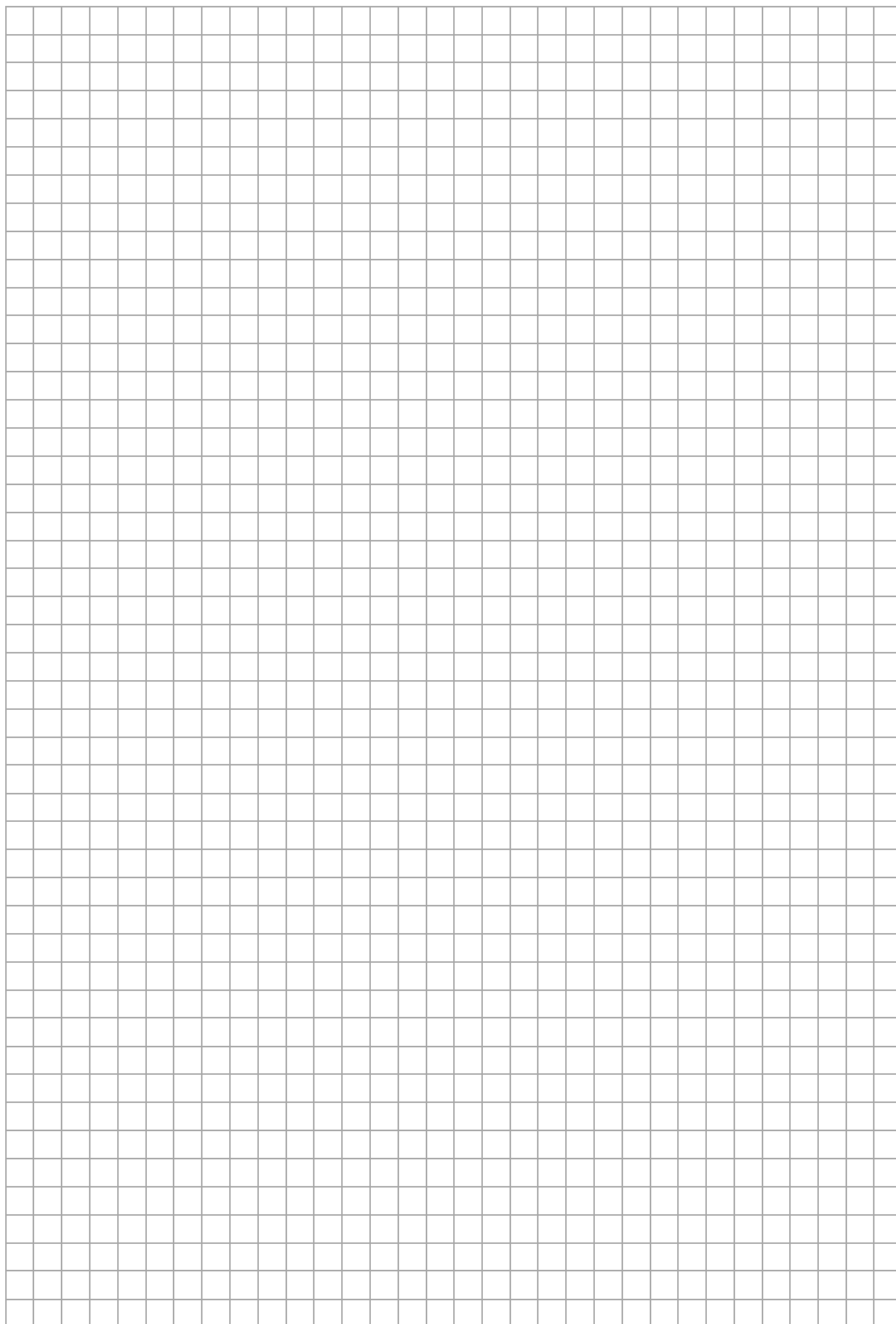


**Zadanie 37.1. (0–2)**

Dwusieczna kąta  $BAC$  przecina odcinek  $DE$  w punkcie  $P$ , takim że  $\frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$ .

**Oblicz długości boków  $AD$  i  $AE$  trójkąta  $ADE$ . Zapisz obliczenia.**

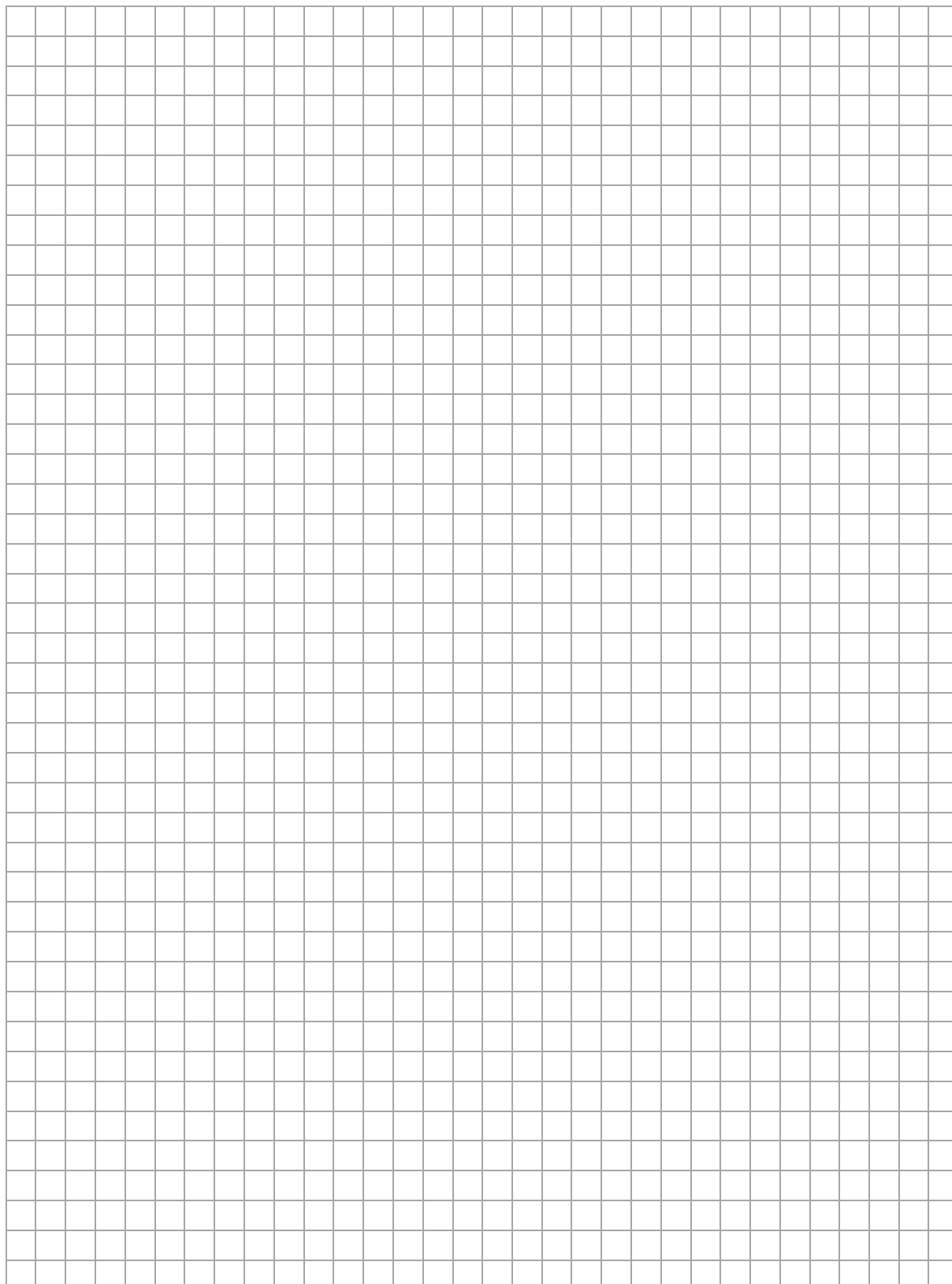




**Zadanie 37.2. (0–3)**

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe 72.

**Oblicz długość boku  $BC$  trójkąta  $ABC$ . Zapisz obliczenia.**





## VIII. Planimetria

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru VIII

Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
- 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezach;
- 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- 7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- 9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

#### Komentarz

Zadania w tym dziale sprawdzają sprawność wyznaczania odcinków i kątów w okręgu, rozpoznawania rodzajów trójkątów i wielokątów oraz korzystania z ich własności, korzystania z twierdzenia Talesa, twierdzenia o dwusiecznej kąta oraz twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą. Sprawdzana jest również umiejętność przeprowadzania dowodów geometrycznych.

#### Pojęcia

- odcinki i proste w okręgu
- kąt wpisany i kąt środkowy
- trójkąty, czworokąty
- wielokąty foremne
- twierdzenie Talesa
- twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa
- twierdzenie o dwusiecznej kąta
- twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą;
- cechy podobieństwa trójkątów
- figury podobne
- dowody geometryczne

**Zadania sprawdzające wymagania z obszaru VIII**

**Zadanie 38. (0–2)**

Dany jest trójkąt równoramienny, który nie jest równoboczny. Punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt  $H$  jest jego ortocentrum.

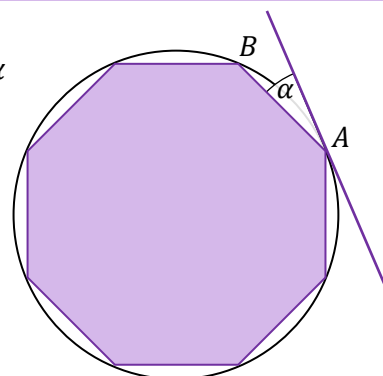
Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród podanych.

- A. Punkt  $O$  jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- B. Punkt  $O$  jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- C. Punkt  $O$  jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.
- D. Punkt  $H$  jest równo oddalony tylko od dwóch wierzchołków tego trójkąta.
- E. Punkt  $H$  jest równo oddalony od trzech wierzchołków tego trójkąta.
- F. Punkt  $H$  jest równo oddalony od trzech boków tego trójkąta.

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Zadanie 39. (0–1)**

Dany jest ośmiokąt foremny wpisany w okrąg  $K$ . Punkty  $A$  oraz  $B$  są sąsiednimi wierzchołkami tego ośmiokąta oraz  $\alpha$  jest kątem między styczną do okręgu  $K$  w punkcie  $A$  i bokiem  $AB$  wielokąta (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta  $\alpha$  jest równa

- A.  $45^\circ$
- B.  $30^\circ$
- C.  $22,5^\circ$
- D.  $15^\circ$

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

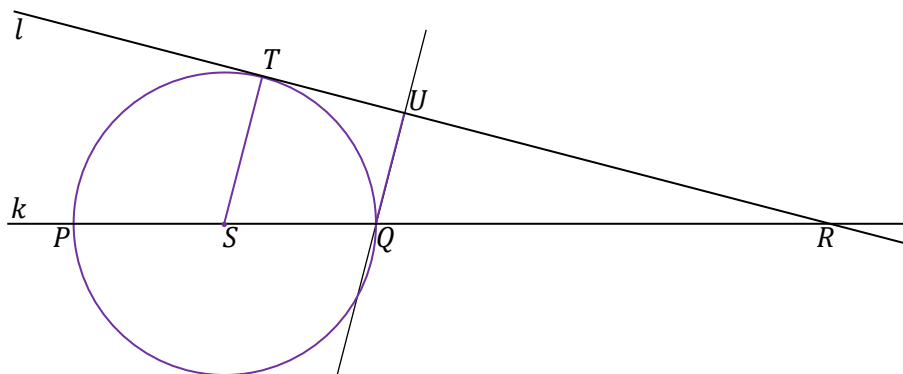


**Zadanie 41. (0–2)**

Dane są:

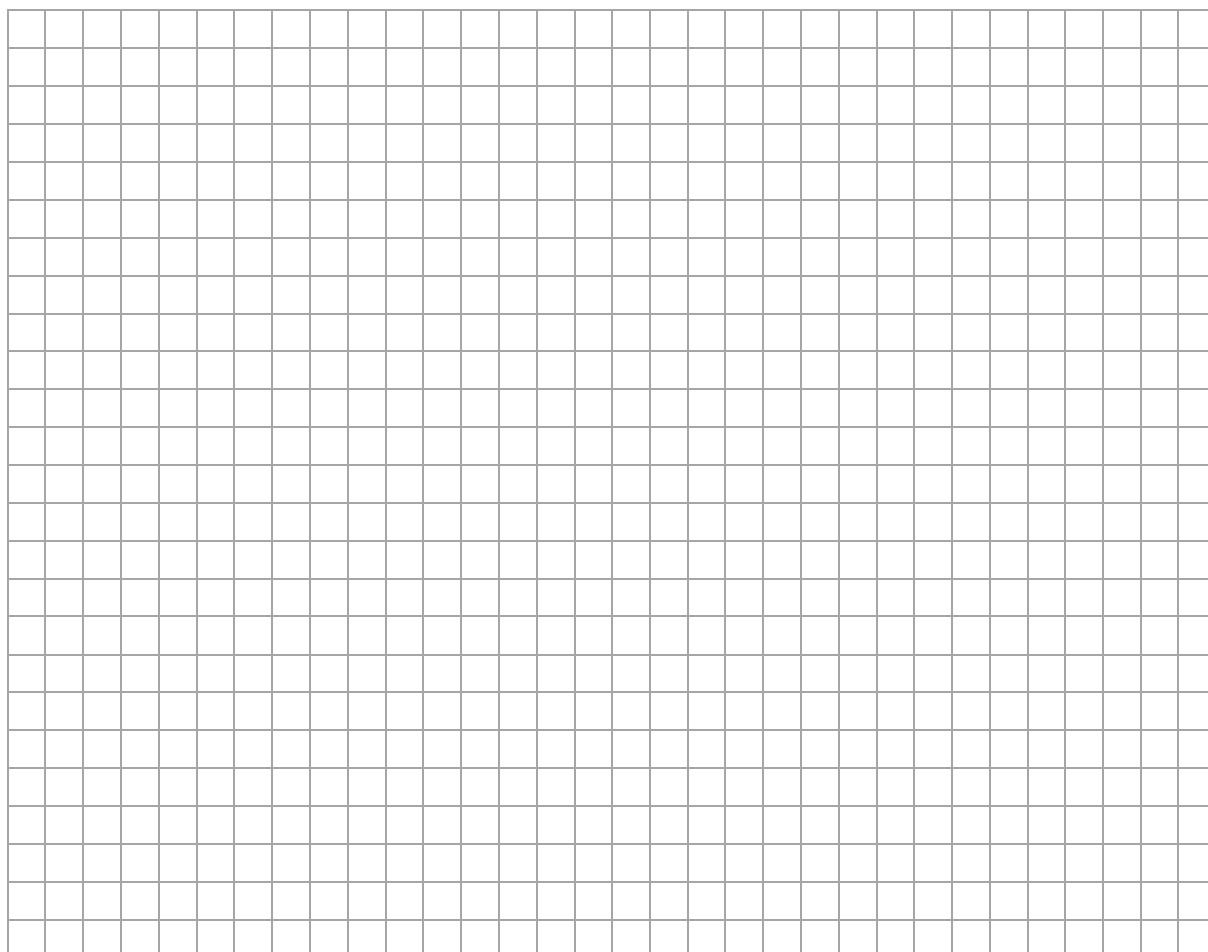
- okrąg o środku  $S$  i promieniu  $r = 1$
- prosta  $k$  przechodząca przez  $S$  i przecinająca okrąg w punktach  $P$  i  $Q$
- prosta  $l$  styczna do danego okręgu w punkcie  $T$ .

Prosta  $k$  przecina prostą  $l$  w punkcie  $R$ . Prosta przechodząca przez punkt  $Q$  i równoległa do odcinka  $ST$  przecina styczną  $l$  w punkcie  $U$  (zobacz rysunek).



Oblicz długość odcinka  $TU$  wiedząc, że spełniony jest warunek  $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$ .

Zapisz obliczenia.

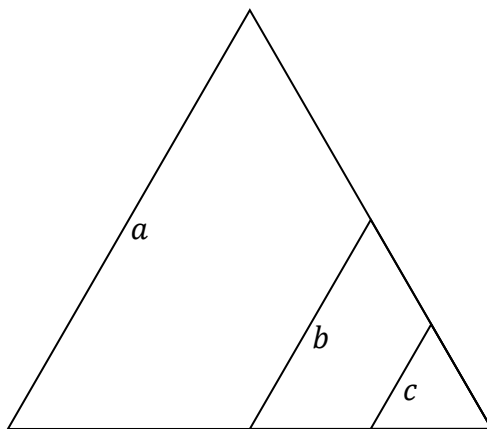




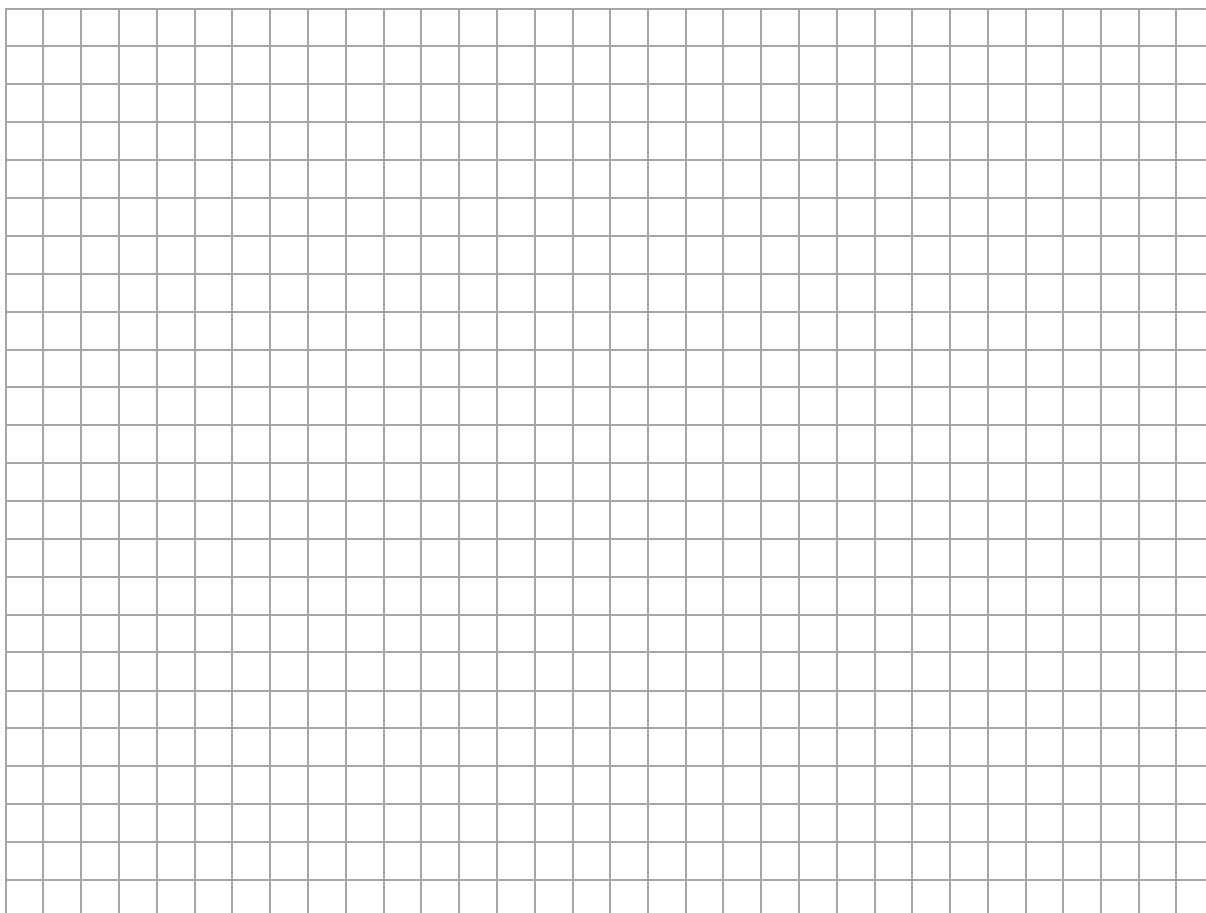


**Zadanie 44. (0–2)****PP**

W trójkącie równobocznym o boku długości  $a$  poprowadzono dwa odcinki równoległe do jednego z jego boków. Długości tych odcinków są równe  $b$  i  $c$ , przy czym  $c < b < a$  (zobacz rysunek). Odcinki podzieliły trójkąt równoboczny na trzy figury: dwa trapezy i trójkąt.



Wykaż, że stosunek pola trapezu o podstawach  $b$  i  $c$  do pola trapezu o podstawach  $a$  i  $b$  jest równy  $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$ .

**PP**

Zadanie sprawdza wymaganie VIII.12 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.





## IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru IX

Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- 4) posługuje się równaniem okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ;
- 5) oblicza odległość punktu od prostej;
- 6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- 7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

#### Komentarz

Podstawową kompetencją sprawdzaną w tym dziale jest sprawność poruszania się w kartezjańskim układzie współrzędnych oraz operowanie obiektami matematycznymi w nim osadzonymi: punktami, prostymi, okręgami. Zadania sprawdzają m.in. umiejętność badania równoległości oraz prostopadłości prostych; szukania punktów wspólnych dwóch prostych, prostej i okręgu, prostej i paraboli; wyznaczania obrazu figur w symetrii osiowej lub środkowej.

#### Pojęcia

- proste prostopadłe
- proste równoległe
- postać ogólna prostej
- postać kierunkowa prostej
- długość odcinka
- odległość punktu od prostej
- punkty wspólne dwóch prostych, prostej i okręgu, prostej i paraboli
- równanie okręgu
- symetria osiowa
- symetria środkowa

**Zadania sprawdzające wymagania z obszaru IX**

**Zadanie 45. (0–1)**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , rozważamy dwie proste o równaniach

$$y = a + b \cdot x \text{ oraz } y = -\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2 \cdot x,$$

gdzie  $a \neq 0, b \neq 0$ .

**Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie spośród 1., 2. albo 3.**

Dla  $a = 2$  i  $b = -\frac{3}{2}$  rozważane proste są

|    |              |          |    |   |
|----|--------------|----------|----|---|
| A. | prostokątne, | ponieważ | 1. | $a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$                  |
|    | równoległe,  |          | 2. | $(a + b) \left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2\right) = -1$ |
| B. |              |          | 3. | $b = -\frac{2}{3}b^2$                                     |

**Zadanie 46.**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , dany jest trójkąt  $ABC$ . Wierzchołki tego trójkąta mają współrzędne:  $A = (-15, -8), B = (-6, 4), C = (-19, -5)$ .

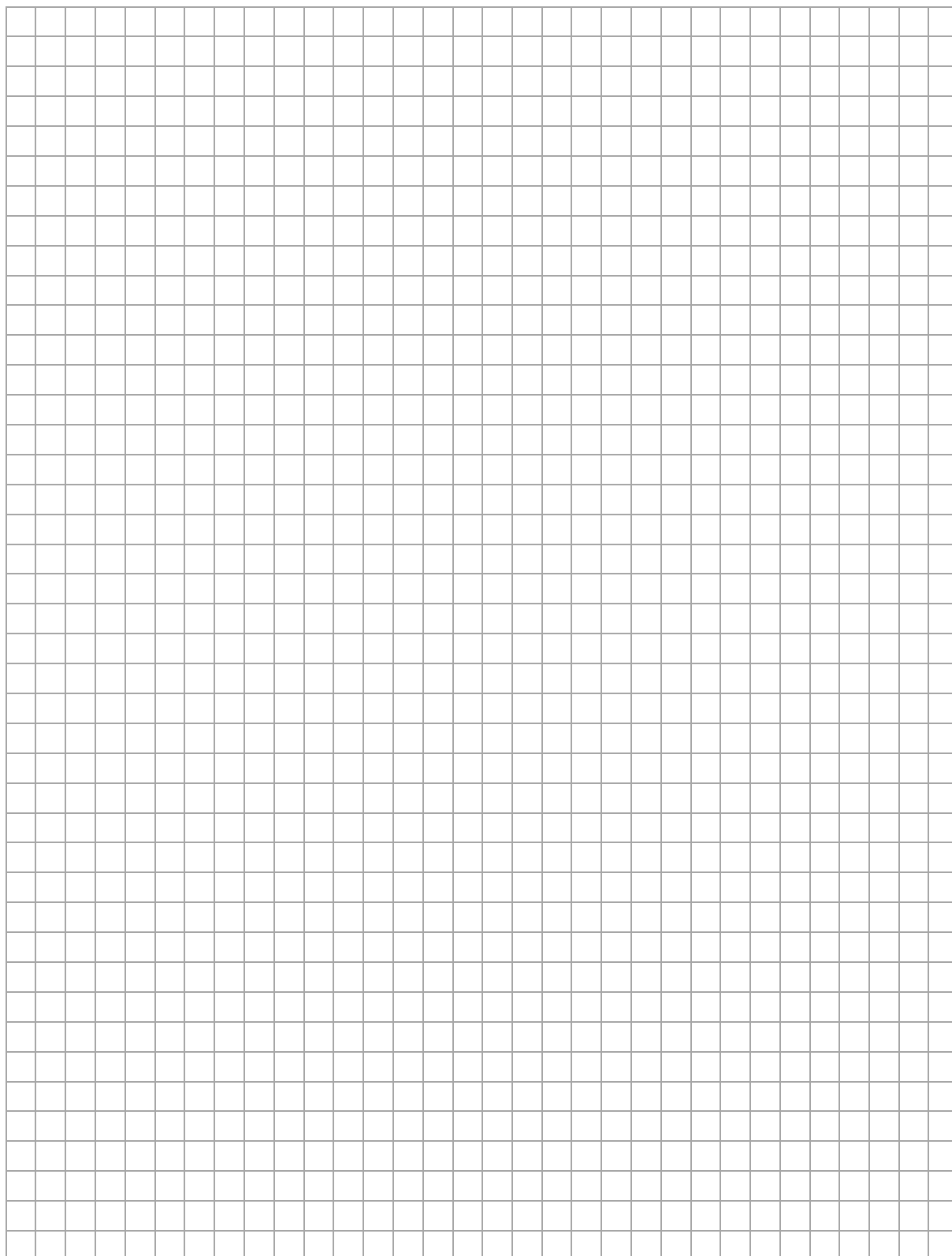
**Zadanie 46.1. (0–2)**

**Wykaż, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny. Zapisz obliczenia.**

**Zadanie 46.2. (0–3)**

Wierzchołki trójkąta  $ABC$  są trzema wierzchołkami równoległoboku  $ABCD$ . Odcinek  $AC$  jest przekątną tego równoległoboku.

**Oblicz współrzędne wierzchołka  $D$ . Zapisz obliczenia.**

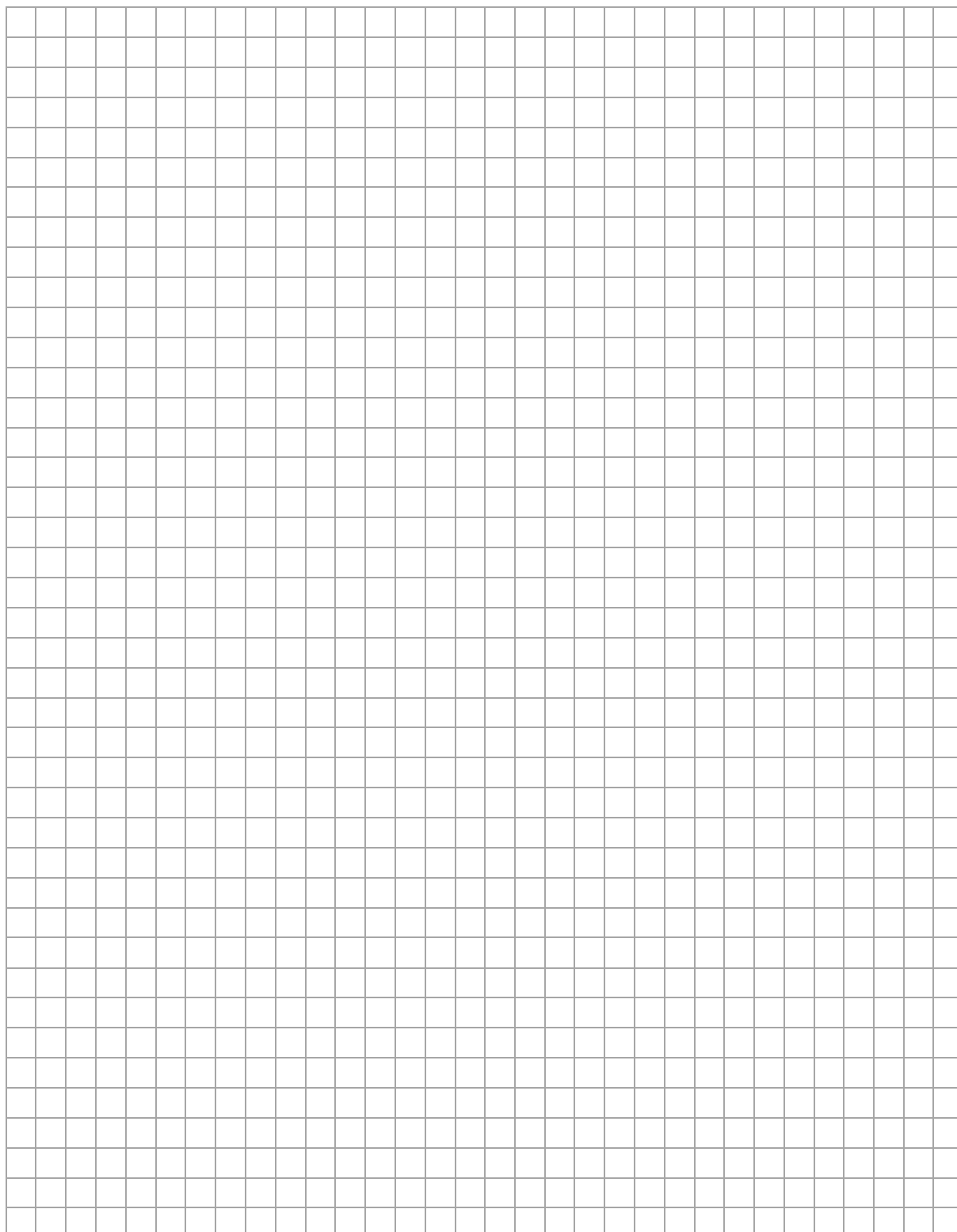




**Zadanie 48. (0–4)**

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ , dany jest trójkąt  $ABC$ . Podstawa  $AB$  tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu  $y = -3x + 6$ . Wierzchołki  $A$  i  $B$  leżą – odpowiednio – na osi  $Oy$  oraz  $Ox$ . Wierzchołek  $C$  ma współrzędne  $(3, 7)$ .

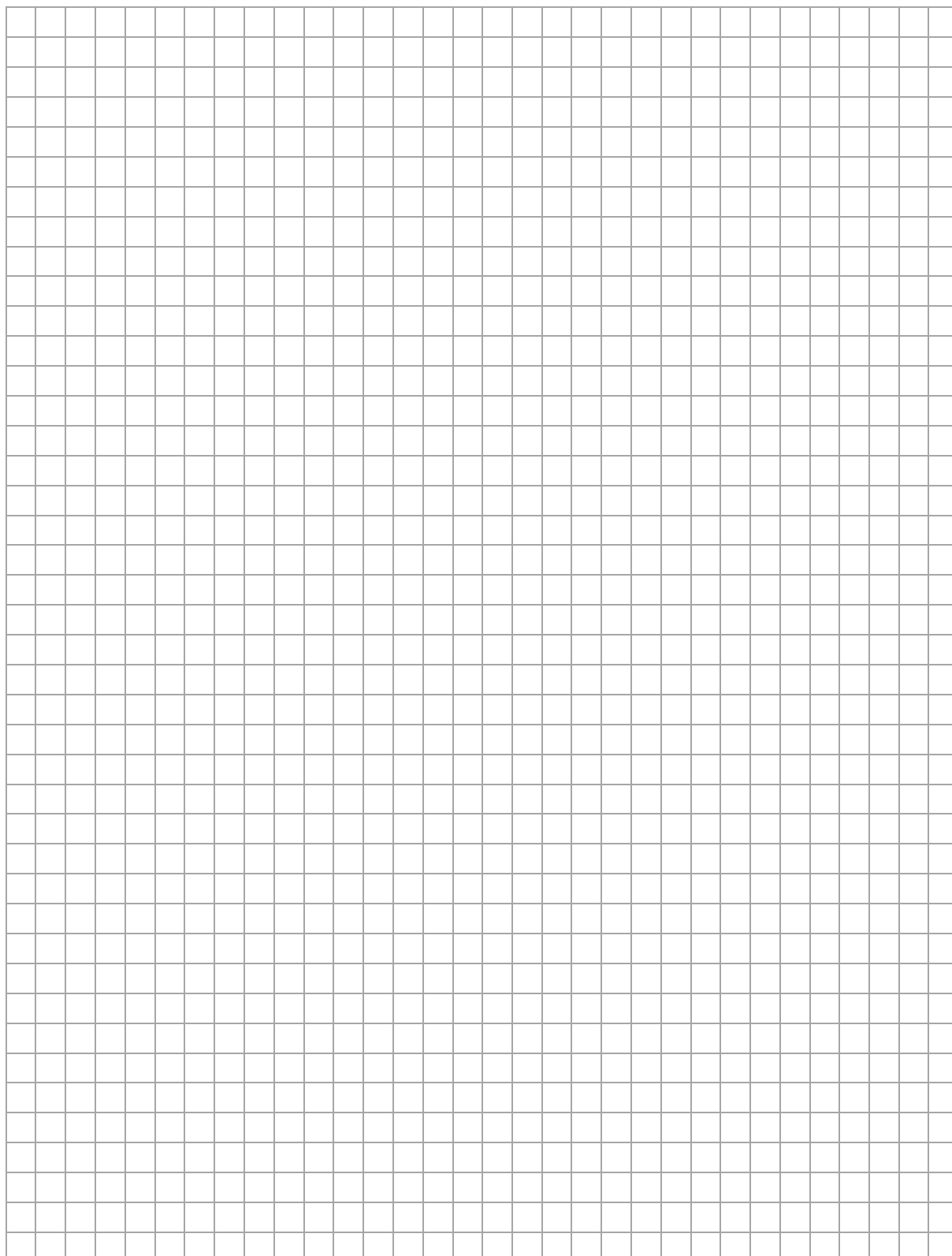
**Oblicz pole trójkąta  $ABC$ . Zapisz obliczenia.**

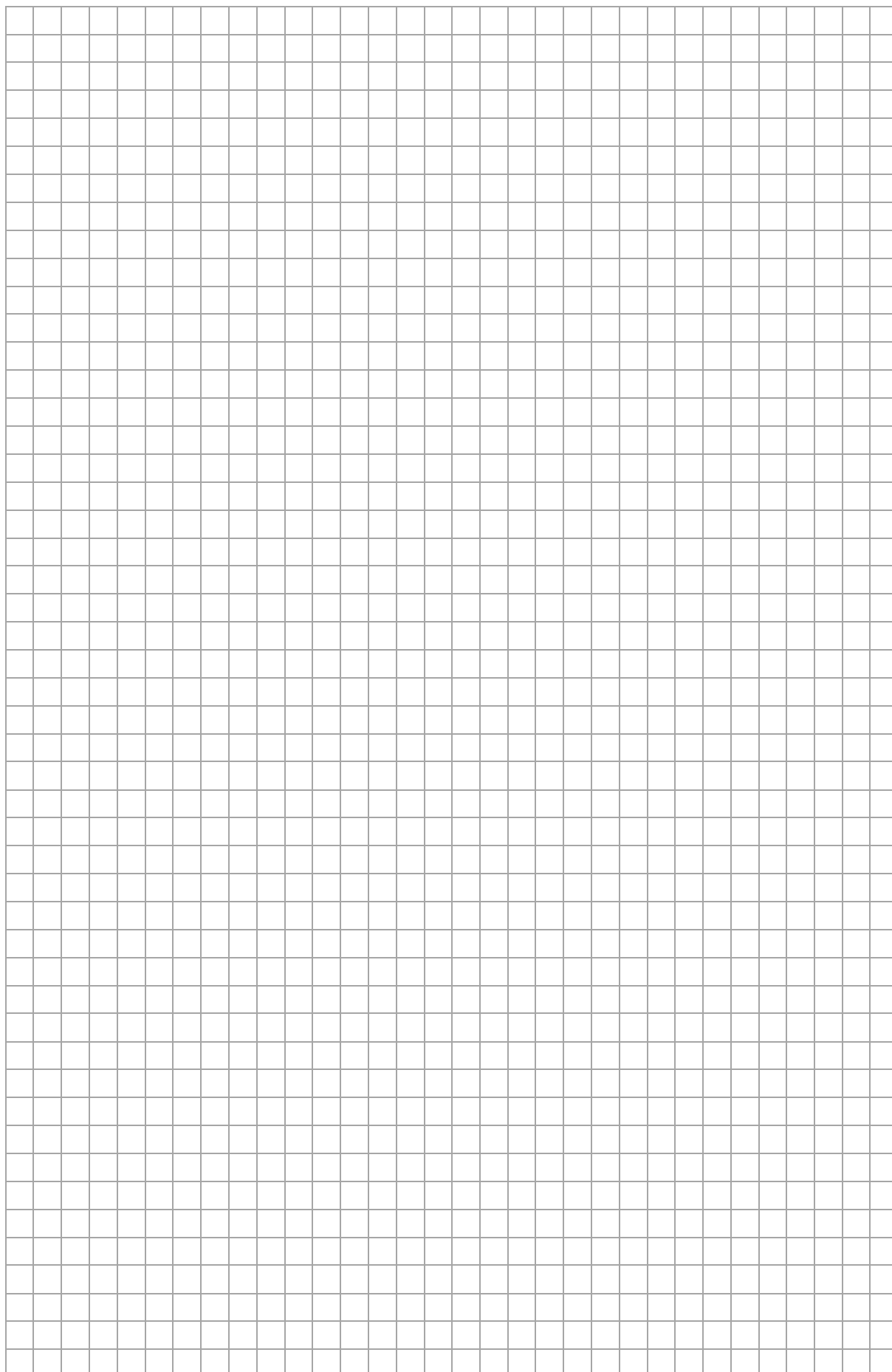


**Zadanie 49. (0–4)**

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  punkty  $A = (-8, 12)$  i  $B = (-2, 4)$  są końcami cięciwy okręgu  $\mathcal{O}$ . Środek tego okręgu leży na prostej  $k$  o równaniu  $y = 4x + 2$ .

**Wyznacz współrzędne środka okręgu  $\mathcal{O}$  i promień tego okręgu. Zapisz obliczenia.**



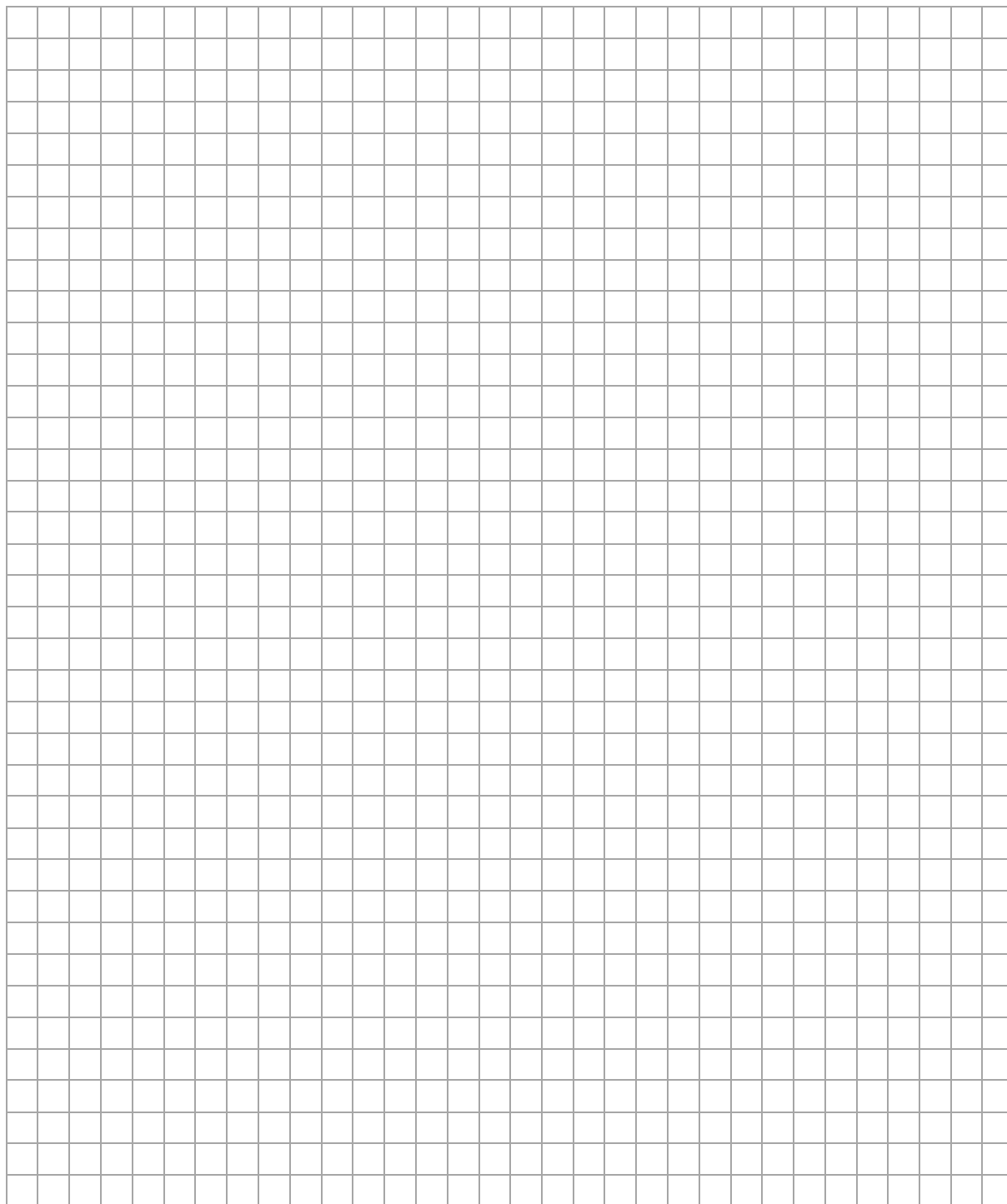


**Zadanie 50. (0–3)**

PP

Funkcja kwadratowa  $f$  określona jest wzorem  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ . Funkcja liniowa  $g$  określona jest wzorem  $g(x) = -x + 5$ .

**Oblicz współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji  $y = f(x)$  oraz funkcji  $y = g(x)$ . Zapisz obliczenia.**



PP

Zadanie sprawdza wymaganie IX.6 podstawy programowej z matematyki, które nie będzie obowiązywało na egzaminie maturalnym w roku 2023 i 2024.



## X. Stereometria

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru X

Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
- 7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

#### Komentarz

Do rozwiązywania zadań z tego działu niezbędna jest wyobraźnia przestrzenna. Zadania sprawdzają m.in. umiejętność posługiwania się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną, kąta dwuściennego oraz przekroju i rozpoznawania ich w wybranych bryłach. Sprawdzana jest umiejętność obliczania pola powierzchni i objętości wybranych figur przestrzennych oraz wykorzystania zależności między objętościami brył podobnych.

#### Pojęcia

- wzajemne położenie prostych w przestrzeni
- kąt między prostą a płaszczyzną
- kąt dwuścienny między półpłaszczyznami
- graniastosłupy
- ostrosłupy
- walec
- stożek
- kula
- pole powierzchni
- objętość











## XI. Kombinatoryka

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru XI

Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
  - a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
  - b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

#### **Komentarz**

W zadaniach zgromadzonych w tym dziale weryfikowana będzie głównie umiejętność zliczania obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, przy zastosowaniu między innymi reguły mnożenia i dodawania.

#### **Pojęcia**

- zliczanie obiektów
- reguła mnożenia
- reguła dodawania





**Zadanie 58. (0–1)**

Na dwóch półkach ustawiano 9 książek: 4 biograficzne i 5 fantasy. Ustawiono je w taki sposób, aby na każdej półce znalazły się książki wyłącznie jednego rodzaju.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Wszystkich sposobów ustawienia książek przy zadanym warunku jest:

A.  $4! \cdot 5! \cdot 2$

B.  $4! \cdot 5!$

C.  $4 \cdot 5$

D.  $4 \cdot 5 \cdot 2$

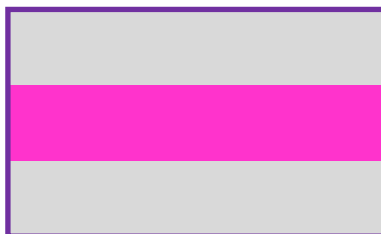
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Zadanie 59. (0–1)**

Firma krawiecka produkuje prostokątne dwukolorowe obrusy w jednakowym rozmiarze. Każdy obrus jest zszyty z trzech pasów materiału tej samej szerokości (zobacz rysunek). Zewnętrzne pasy są w tym samym kolorze. Cały obrus jest obszyty lamówką w jednym kolorze.

W firmowym magazynie materiały są dostępne w 5 kolorach, a lamówka – w 3 kolorach.

Obrusy uznajemy za **różne**, gdy różnią się kolorem lamówki lub kolorem pasów zewnętrznych, lub kolorem pasa wewnętrznego.



**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Liczba wszystkich różnych obrusów, które firma może produkować, jest równa

A.  $5 \cdot 4 \cdot 3$

B.  $5 \cdot 5 \cdot 3$

C.  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$

D.  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3$

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



## XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru XII

Uczeń:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- 2) stosuje skalę centylową;
- 3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
- 4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
- 5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

#### **Komentarz**

Zadania z tego działu sprawdzają m.in. umiejętność obliczania prawdopodobieństwa w modelu klasycznym, wyznaczania średniej arytmetycznej, średniej ważonej, mediany i dominanty. Sprawdzana jest również umiejętność obliczania odchylenia standardowego zestawu danych oraz wartości oczekiwanej doświadczenia losowego.

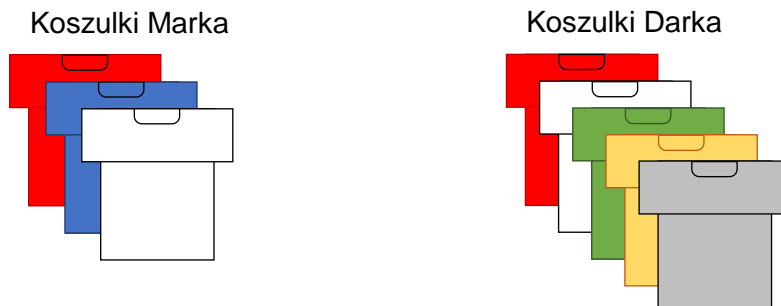
#### **Pojęcia**

- prawdopodobieństwo w modelu klasycznym
- skala centylowa
- średnia arytmetyczna
- średnia ważona
- mediana
- dominanta
- odchylenie standardowe
- wartość oczekiwana



**Zadanie 63. (0–1)**

Marek ma 3 koszulki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Darek ma 5 koszulek w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Chłopcy umówili się, że następnego dnia każdy z nich założy wybraną w sposób losowy jedną ze swoich koszulek.



**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia chłopcy założą koszulki w tym samym kolorze, jest równe

A.  $\frac{2}{15}$

B.  $\frac{3}{5}$

C.  $\frac{2}{5}$

D.  $\frac{4}{15}$

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Zadanie 64. (0–1)**

Dany jest pięciokąt foremny  $ABCDE$ . Losujemy jednocześnie dwa różne wierzchołki tego pięciokąta.

**Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.**

Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowane wierzchołki będą końcami przekątnej pięciokąta  $ABCDE$ , jest równe

A.  $\frac{3}{10}$

B.  $\frac{3}{5}$

C.  $\frac{2}{5}$

D.  $\frac{1}{2}$

|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Brudnopis |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|           |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Zadanie 65. (0–1)**

Ze zbioru pięciu liczb  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem.

**Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.**

|   |   |   |
|---|---|---|
| Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta, jest równe $\frac{8}{25}$ . | P | F |
| Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie liczby będą parzyste, jest równe $\frac{2}{25}$ .               | P | F |

*Brudnopis*

### XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

#### Wymagania szczegółowe z zakresu obszaru XIII

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

##### **Komentarz**

W dziale tym zadania sprawdzają umiejętność rozwiązywania zadań optymalizacyjnych w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Optymalizacja to szukanie najlepszego rozwiązania (wartości najmniejszej lub największej) spełniającego warunki zadania.

##### **Pojęcia**

- optymalizacja
- funkcja kwadratowa

**Zadania sprawdzające wymagania z obszaru XIII**

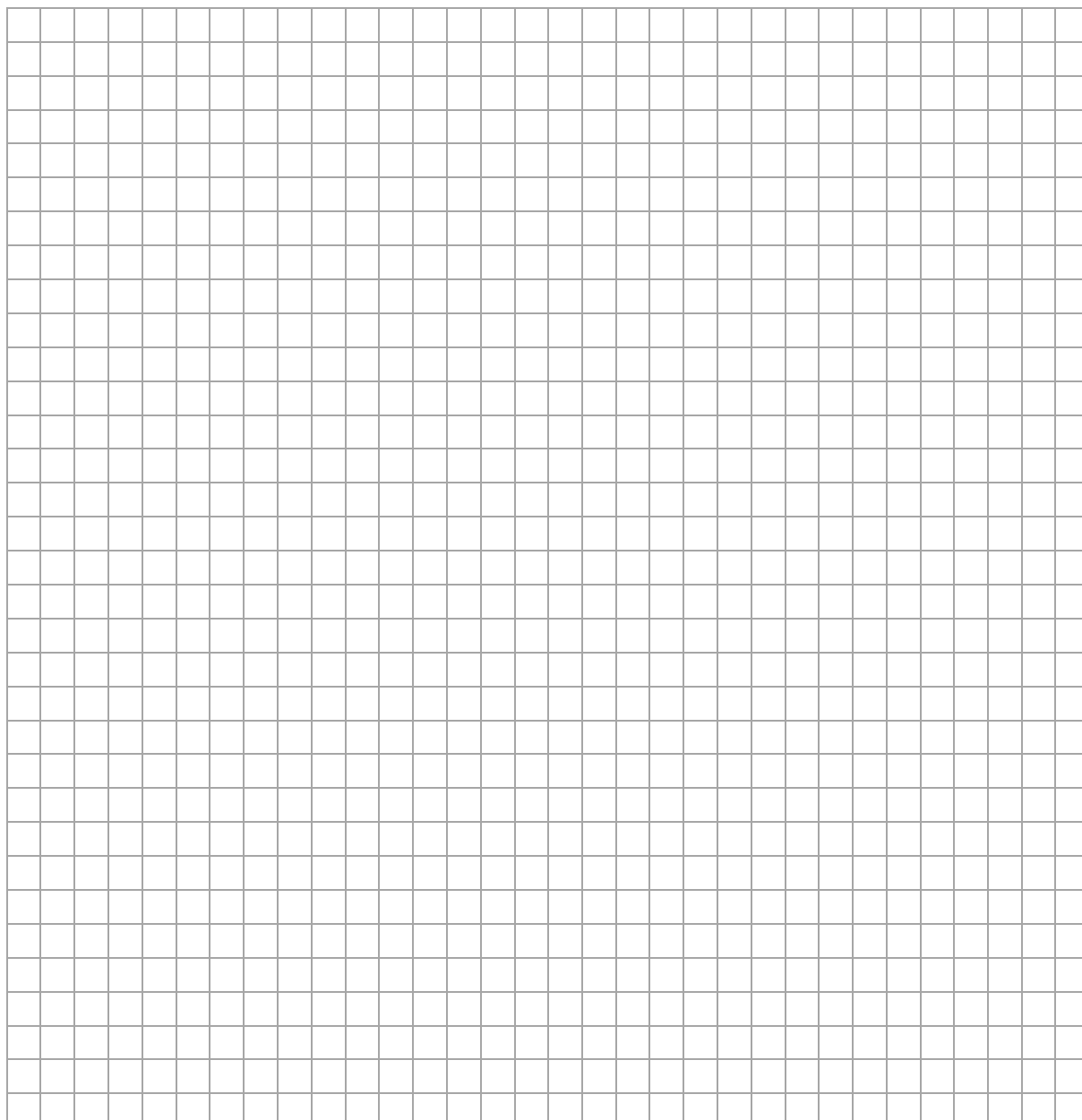
**Zadanie 66. (0–3)**

Firma handlowa ustaliła, że liczba sprzedanych przez nią egzemplarzy gry komputerowej w ciągu każdego tygodnia zależy od jej ceny. Liczbę sprzedanych egzemplarzy opisuje funkcja  $f(x) = 2400 - 15x$ , gdzie  $x$  oznacza cenę jednostkową gry.

**Jaka powinna być cena jednostkowa, aby tygodniowy przychód  $P$  ze sprzedaży gry był największy? Oblicz ten największy przychód.**

**Zapisz obliczenia.**

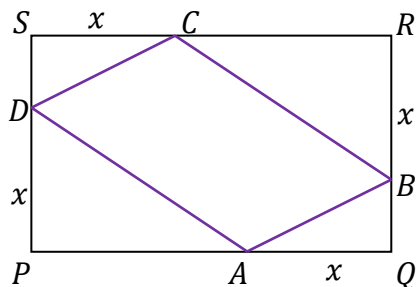
*Wskazówka: przyjmij, że przychód jest iloczynem liczby sprzedanych gier oraz ceny jednostkowej tej gry.*



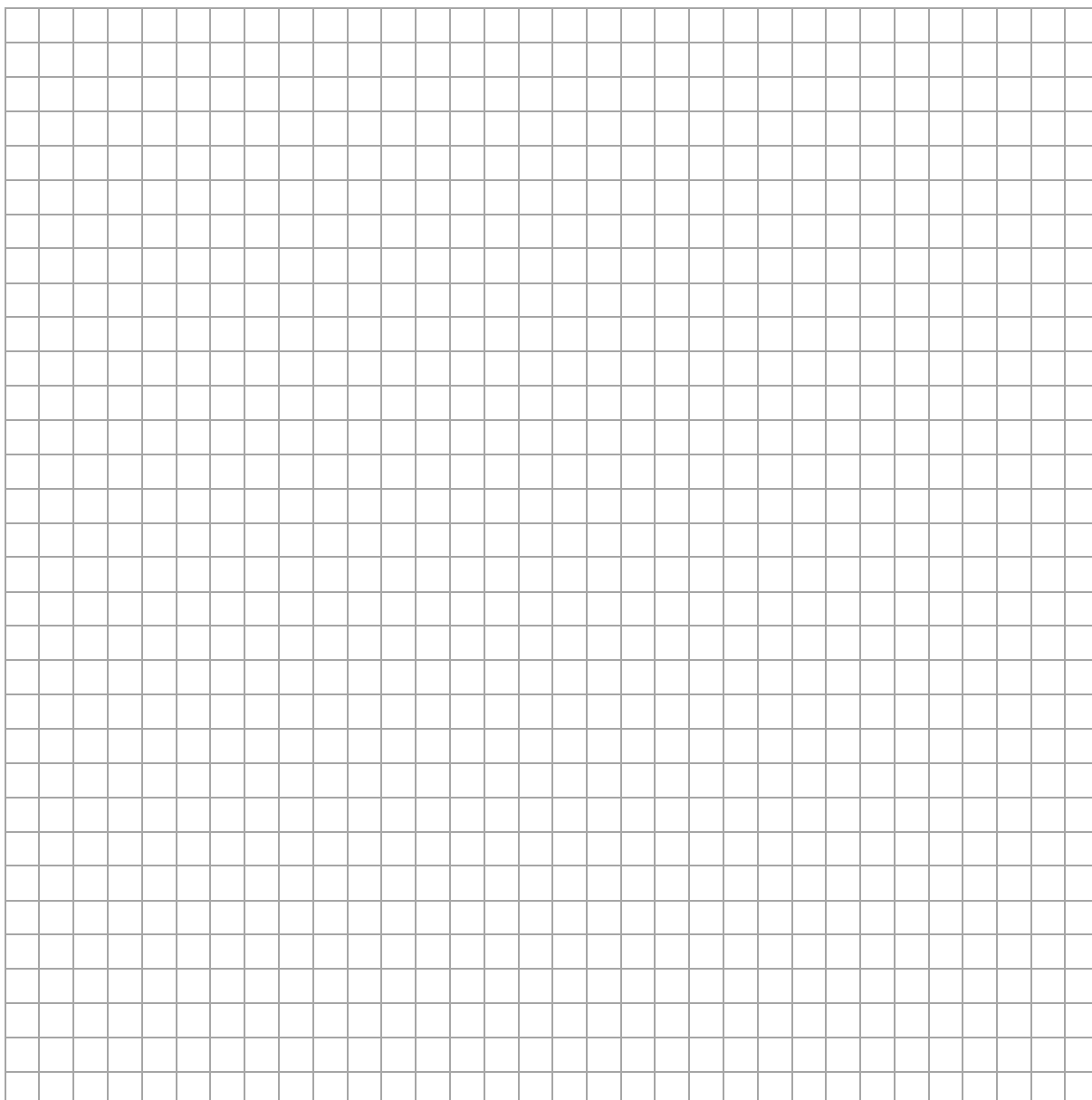


**Zadanie 67. (0–4)**

Dany jest prostokąt  $PQRS$  o bokach długości  $|PQ| = |SR| = 10$  oraz  $|PS| = |QR| = 6$ . Na bokach  $PQ, QR, RS, SP$  obrano odpowiednio punkty  $A, B, C, D$  takie, że  $|AQ| = |BR| = |CS| = |DP| = x$  oraz  $x \geq 3$  (zobacz rysunek).



Wyznacz długość odcinka  $x$ , dla którego pole czworokąta  $ABCD$  jest najmniejsze. Wyznacz to pole. Zapisz obliczenia.





# Zasady oceniania

## I. Liczby rzeczywiste

### Zadanie 1. (0–2)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>3. Dobieranie argumentów do uzasadniania poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów gwarantujących poprawność rozumowania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Uczeń:<br>I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:<br>a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych. |

#### Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu.

1 pkt – zapisanie sumy trzech kolejnych liczb jako  $3n$  lub  $3(n + 1)$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązania

##### Sposób I

Oznaczmy trzy kolejne liczby jako  $n - 1, n, n + 1$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ .

Wówczas ich suma to

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

Ponieważ  $n$  jest liczbą całkowitą, to liczba  $3n$  jest podzielna przez 3.

##### Sposób II

Oznaczmy trzy kolejne liczby jako  $n, n + 1, n + 2$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ .

Wówczas ich suma to

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Ponieważ  $n$  jest liczbą całkowitą, to liczba  $3(n + 1)$  jest podzielna przez 3.

### Zadanie 2. (0–1)

| Wymaganie ogólne   | Wymagania szczegółowe   |
|--|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Uczeń:<br>I.3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;<br>II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ [...]. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

$x = 9$

$y = 2$

**Zadanie 3. (0–3)**

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe  |
|--|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Uczeń:<br>I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – zapisanie wartości wyrażenia:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

2 pkt – zapisanie wartości wyrażenia z niewymiernością w mianowniku:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

1 pkt – zapisanie zależności między  $a$  i  $b$ :

$$a = -\frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad b = -\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{lub} \quad \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{lub} \quad \frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Z warunków zadania mamy

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$$

Wynika stąd, że

$$a\sqrt{2} = -b\sqrt{3}$$

Mamy zatem zależność

$$\frac{a}{b} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{oraz} \quad \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Podstawiając te wartości do wyrażenia  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  mamy:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{2\sqrt{6}}{6} - \frac{3\sqrt{6}}{6} = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

**Zadanie 4. (0–2)**

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe  |
|--|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Uczeń:<br>I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – doprowadzenie wyrażenia do postaci 1 i stwierdzenie, że 1 jest liczbą całkowitą.

1 pkt – zapisanie wyrażenia w postaci

$$a = \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{4} - \sqrt{3})}$$

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Rozszerzając każdy z ułamków przez odpowiednią różnicę pierwiastków, a następnie stosując wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń do każdego z mianowników, otrzymamy ułamki, których mianowniki redukują się do 1:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{4} - \sqrt{3})} = \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Liczba 1 jest liczbą całkowitą.

**Zadanie 5. (0–1)**

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe  |
|--|--|
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Uczeń:<br>I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

*Komentarz*

Stosując związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach otrzymujemy:

$$\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4 = 2^2 = 2^{\frac{4}{2}}$$

**Zadanie 6. (0–2)**

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe  |
|--|--|
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Uczeń:<br>I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – obliczenie stosunku okresów:

$$\frac{T_K}{T_Z} = \sqrt{6,056} \approx 2,46$$

1 pkt – zapisanie stosunku okresu drgań wahadła zegara na Księżycu do okresu drgań tego samego wahadła na Ziemi:

$$\frac{T_K}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{1,62}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Obliczamy stosunek  $\frac{T_K}{T_Z}$  i stosujemy twierdzenie o dzieleniu pierwiastków tego samego stopnia

$$\frac{T_K}{T_Z} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{1,62}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{9,81}}} = \sqrt{\frac{\frac{l}{1,62}}{\frac{l}{9,81}}} = \sqrt{\frac{l}{1,62} \cdot \frac{9,81}{l}} = \sqrt{\frac{9,81}{1,62}} \approx \sqrt{6,056} \approx 2,46$$

### Zadanie 7. (0–1)

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe   |
|--|---|
| I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Uczeń:<br>I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

#### Komentarz

Stosując wzór na logarytm iloczynu oraz logarytm potęgi, otrzymujemy przekształcanie:

$$\begin{aligned} \log k + \log \frac{1}{100} k^2 - \log \frac{1}{10} k^3 &= \log k + \log \frac{1}{100} + \log k^2 - (\log \frac{1}{10} + \log k^3) = \\ &= \log k - 2 + 2 \log k + 1 - 3 \log k = -1 \end{aligned}$$

### Zadanie 8. (0–2)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń<br>I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. |

#### Zasady oceniania

2 pkt – wybranie dwóch poprawnych odpowiedzi: B i E.

1 pkt – wybranie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo E.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

BE



## II. Wyrażenia algebraiczne

### Zadanie 9. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>II.1). stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ , $(a - b)^2$ , $a^2 - b^2$ , $(a + b)^3$ , $(a - b)^3$ , $a^3 - b^3$ , $a^n - b^n$ . |

#### Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

FP

### Zadanie 10. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>II.5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

**Zadanie 11. (0–3)**

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Uczeń:<br>II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ , $(a - b)^2$ , $a^2 - b^2$ [...];<br>7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;<br>8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:<br>$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$ , $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ , $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$ . |

**Zasady oceniania**

3 pkt – obliczenie wartości wyrażenia  $-\frac{ab}{a-b}$  dla  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$  oraz  $b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ :  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

2 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia  $\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right)$  do postaci  $-\frac{ab}{a-b}$

1 pkt – poprawne przekształcenie wyrażenia  $\left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right)$  do postaci

$$-\frac{ab}{(a-b)(a+b)} : \frac{a-b}{a^2-b^2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przekształcamy wyrażenie do prostszej postaci, stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) &= \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a+b)(a-b)}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} - \frac{a^2}{(a+b)(a-b)}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = \\ &= \left(\frac{a^2-ab-a^2}{(a+b)(a-b)}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = \frac{-ab}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b} \end{aligned}$$

Obliczamy wartość wyrażenia  $-\frac{ab}{a-b}$ , podstawiając za  $a$  oraz  $b$  odpowiednie wartości liczbowe:

$$-\frac{ab}{a-b} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{2}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

**Zadanie 12. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ , $(a - b)^2$ , $a^2 - b^2$ [...];<br>II.7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;<br>II.8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:<br>$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$ , $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ , $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$ . |

**Zasady oceniania**

2 pkt – zapisanie współczynników:  $a = 5$ ,  $b = -13$ ,  $c = 1$ ,  $d = -3$

1 pkt – doprowadzenie wyrażenia do postaci  $\frac{5x-13}{x-3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przekształcamy podane wyrażenie:

$$\frac{2}{x-3} + 5 = \frac{2}{x-3} + \frac{5(x-3)}{x-3} = \frac{2+5x-15}{x-3} = \frac{5x-13}{x-3}$$

Doprowadziliśmy wyrażenie do postaci

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

zatem

$$a = 5, b = -13, c = 1, d = -3$$

**Zadanie 13. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>II.5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A1

## III. Równania i nierówności

## Zadanie 14. (0–2)

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Uczeń:<br>III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;<br>III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą. |

## Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania nierówności, podanie poprawnego zbioru wszystkich rozwiązań nierówności i podanie największej liczby całkowitej  $x_{max}$ , która spełnia podaną nierówność:  $(-\infty, -3]$  i  $x_{max} = -3$

1 pkt – poprawne przekształcenie nierówności do postaci  $x \leq \frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Nierówność  $2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$  przekształcamy równoważnie:

$$2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$$

$$2x - \sqrt{5} \cdot x \geq 3\sqrt{5} - 6$$

$$(2 - \sqrt{5}) \cdot x \geq 3\sqrt{5} - 6$$

Dzielimy obie strony nierówności przez  $(2 - \sqrt{5})$ . Ponieważ liczba ta jest ujemna, więc należy pamiętać o odpowiedniej zmianie zwrotu nierówności.

$$x \leq \frac{3\sqrt{5} - 6}{2 - \sqrt{5}}$$

Upraszczamy ułamek  $\frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}}$ :

$$x \leq \frac{-3(2 - \sqrt{5})}{2 - \sqrt{5}}$$

$$x \leq -3$$

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $2x \geq \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$  jest  $(-\infty, -3]$ .  
Największą liczbą całkowitą, która spełnia tę nierówność jest  $(-3)$ .

**Uwaga**

Ułamek  $\frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}}$  możemy uprościć, usuwając niewymierność z mianownika:

$$\frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-6}{2-\sqrt{5}} \cdot \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+15-12-6\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{-1} = -3$$

**Zadanie 15. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>III.6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i wyznaczenie wszystkich rozwiązań

$$\text{równania: } x = -3 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = \frac{1}{2}$$

1 pkt – zapisanie wielomianu  $-2x^3 + x^2 + 18x - 9$  w postaci iloczynowej:

$$(x-3)(x+3)(2x-1)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Zapisujemy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów

$$-x^2(2x-1) + 9(2x-1) = 0 \text{ lub } 2x(-x^2+9) - 1(-x^2+9) = 0$$

Stąd

$$(-x^2+9)(2x-1) = 0$$

$$(3-x)(3+x)(2x-1) = 0$$

Zatem rozwiązaniami równania  $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$  są:  $x = -3$  lub  $x = \frac{1}{2}$  lub  $x = 3$ .

Sposób II

Korzystamy z definicji podzielności wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x - a)$ . Obliczamy  $W(3) = 0$  i stwierdzamy, że liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = -2x^3 + x^2 + 18x - 9$ . Po podzieleniu wielomianu  $W$  przez dwumian  $(x - 3)$  otrzymujemy iloraz  $(-2x^2 - 5x + 3)$ . Zapisujemy dane równanie w postaci

$$(x - 3)(-2x^2 - 5x + 3) = 0$$

Stąd

$$x - 3 = 0, \text{ lub } -2x^2 - 5x + 3 = 0$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 - 7}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \cdot (-2)} = \frac{5 + 7}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$$

Rozwiązując równanie  $x - 3 = 0$ , otrzymujemy:  $x = 3$ .

Rozwiązania równania  $-2x^3 + x^2 + 18x - 9 = 0$  to:  $x = \frac{1}{2}$  lub  $x = -3$  lub  $x = 3$ .

**Zadanie 16. (0–3)**

| Wymagania ogólne   | Wymaganie szczegółowe   |
|--|---|
| <p>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</p> <p>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.</p> <p>I. Sprawność rachunkowa.</p> <p>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.</p> | <p>Uczeń:</p> <p>III.6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci <math>W(x) = 0</math> dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.</p> |

**Zasady oceniania**

3 pkt – obliczenie i zapisanie rozwiązań równania:  $(-4), 1, 3$

2 pkt – zapisanie alternatywy równań:  $x - 1 = 0$  lub  $-x^2 - x + 12 = 0$

1 pkt – poprawne przekształcenie równania do postaci  $(x - 1)(-x^2 - x + 12) = 0$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Przekształcamy lewą stronę równania  $-x^3 + 13x - 12 = 0$  w sposób równoważny tak, aby otrzymać postać iloczynową wielomianu  $-x^3 + 13x - 12$ :

$$\begin{aligned} -x^3 + 13x - 12 &= 0 \\ -x^3 + x + 12x - 12 &= 0 \\ -x(x^2 - 1) + 12(x - 1) &= 0 \\ -x(x - 1)(x + 1) + 12(x - 1) &= 0 \\ (x - 1)[-x(x + 1) + 12] &= 0 \\ (x - 1)(-x^2 - x + 12) &= 0 \end{aligned}$$

Korzystamy z własności iloczynu i zapisujemy równanie  $(x - 1)(-x^2 - x + 12) = 0$  jako alternatywę równań:

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad -x^2 - x + 12 = 0$$

Rozwiązując równanie  $x - 1 = 0$ , otrzymujemy:  $x = 1$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49 \\ x &= \frac{1 + 7}{-2} = -4 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1 - 7}{-2} = 3 \end{aligned}$$

Zatem rozwiązaniami równania  $-x^3 + 13x - 12 = 0$  są liczby:  $(-4)$ ,  $1$  oraz  $3$ .

*Sposób II*

Korzystamy z definicji podzielności wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $(x - a)$ . Obliczamy  $W(1) = 0$  i stwierdzamy, że liczba  $1$  jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = -x^3 + 13x - 12 = 0$$

Po podzieleniu wielomianu  $W$  przez dwumian  $(x - 1)$  otrzymujemy iloraz  $(-x^2 - x + 12)$ .

Zapisujemy dane równanie w postaci

$$(x - 1)(-x^2 - x + 12) = 0$$

Stąd

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad -x^2 - x + 12 = 0$$

Rozwiązując równanie kwadratowe, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49 \\ x &= \frac{1 + 7}{-2} = -4 \quad \text{lub} \quad x = \frac{1 - 7}{-2} = 3 \end{aligned}$$

Rozwiązując równanie  $x - 1 = 0$ , otrzymujemy:  $x = 1$

Rozwiązania równania  $-x^3 + 13x - 12 = 0$  to:  $x = -4$  lub  $x = 1$  lub  $x = 3$ .

**Zadanie 17. (0–4)**

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. | Uczeń:<br>III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.<br>V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje). |

**Zasady oceniania**

4 pkt – rozwiązanie równania i podanie prawidłowego wyniku:  $m = 90$

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą:  $\frac{1}{2}m^2 - 5m - 3600 = 0$   
 lub  $2n^2 + 10n - 3600 = 0$

2 pkt – zapisanie równania uwzględniającego warunki zadania:  $(m - 10) \cdot (n + 5) = 3600$   
 lub  $mn + 5m - 10n - 50 = 3600$  oraz wyznaczenie wielkości  $m$  lub  $n$ :  
 $n = \frac{1}{2}m - 5$  lub  $m = 2n + 10$

1 pkt – zapisanie, że do rozwiązania pozostało 3600 zadań i zapisanie równania  
 $m \cdot n = 3600$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Niech  $m$  będzie liczbą dni potrzebnych na rozwiązanie pozostałych zadań.

Szymonowi pozostało do rozwiązania  $3697 - 97 = 3600$  zadań, zatem

$$m \cdot n = 3600$$

Przy zwiększonej dziennej liczbie rozwiązanych zadań otrzymujemy równanie:

$$(m - 10) \cdot (n + 5) = 3600$$

$$mn + 5m - 10n - 50 = 3600$$

Podstawiamy  $mn = 3600$  i wyznaczamy wielkość  $n$ :

$$3600 + 5m - 10n - 50 = 3600$$

$$n = \frac{1}{2}m - 5$$

Podstawiając  $n = \frac{1}{2}m - 5$ , do równania kwadratowego otrzymujemy:

$$(m - 10) \cdot \left(\frac{1}{2}m - 5 + 5\right) = 3600$$

Opuszczając nawiasy i przekształcając równanie, otrzymujemy:



$$m^2 - 10m - 7200 = 0$$

Wyróżnikiem tego równania kwadratowego jest  $\Delta = 28900$ , zaś jego rozwiązania to  $m_1 = -80$  oraz  $m_2 = 90$ . Z warunków zadania wynika, że jedynym rozwiązaniem zadania jest liczba 90.

Dla  $m = 90$  mamy  $n = \frac{3600}{90} = 40$ .

Szymon zamierza rozwiązywać codziennie 40 zadań. Zajmie mu to 90 dni.

### Zadanie 18. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>III.7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$ , gdzie wielomiany $V(x)$ , i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

#### Komentarz

Stosując wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$  [...], otrzymujemy:

$$\frac{3x(x - 2)(x - 3)(x + 3)}{(x - 2)(x - 3)^2} = 0$$

Stąd

$$3x = 0 \text{ lub } x - 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0 \text{ lub } x + 3 = 0$$

$$\text{Zatem } x = 0 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = 3 \text{ lub } x = -3.$$

Ponieważ równanie ma sens, gdy  $x \neq 2$  lub  $x \neq 3$ , więc jego rozwiązaniami są liczby  $x = 0$ ,  $x = -3$ .

**Zadanie 19. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny.<br>II.7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawna metoda rozwiązania zadania i prawidłowe podanie liczb  $m$  i  $n$ :

$$m = 2, n = 5.$$

1 pkt – zapisanie równania wynikającego z warunków zadania:  $\frac{m+6}{n+15} = \frac{m}{n}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zapisując warunki zadania, mamy

$$\frac{m + 6}{n + 15} = \frac{m}{n}$$

Przekształcając to równanie, otrzymujemy kolejno:

$$m(n + 15) = n(m + 6)$$

$$15m = 6n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Ponieważ  $\frac{2}{5}$  jest ułamkiem nieskracalnym, to szukanymi liczbami są odpowiednio:

$$m = 2 \text{ oraz } n = 5.$$

## IV. Układy równań

## Zadanie 20. (0–2)

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>I. Sprawność rachunkowa.<br>Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych. | Uczeń:<br>IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;<br>IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych. |

## Zasady oceniania

2 pkt – zapisanie dwóch równań wynikających z warunków zadania (np.  $x + y = 14$  i  $y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1$ ) oraz poprawne rozwiązanie tego układu równań, oraz podanie poprawnej odpowiedzi: 86.

1 pkt – zapisanie, że szukana liczba ma postać  $x \cdot 10 + y \cdot 1$  oraz zapisanie, że liczba o zamienionych miejscami cyfrach ma postać  $y \cdot 10 + x \cdot 1$ , oraz zapisanie jednego z równań wynikających z warunków zadania, np.  $x + y = 14$  lub  $y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$x$  – cyfra dziesiątek szukanej liczby  $a$ ,

$y$  – cyfra jedności szukanej liczby  $a$ ,

gdzie  $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Jeżeli  $x$  jest cyfrą dziesiątek, a  $y$  cyfrą jedności liczby dwucyfrowej  $a$ , to ta liczba jest równa  $a = x \cdot 10 + y \cdot 1$ .

Jeżeli w tej liczbie przestawimy/zamienimy miejscami cyfry, to liczba o przestawionych/zamienionych miejscami cyfrach jest równa  $y \cdot 10 + x \cdot 1$ .

Liczba o zamienionych miejscami cyfrach jest o 18 mniejsza od liczby, w której dokonujemy zamiany, więc

$$y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1$$

Suma cyfr w liczbie jest równa 14, więc  $x + y = 14$ .

Rozwiązujemy układ równań  $\begin{cases} y \cdot 10 + x \cdot 1 + 18 = x \cdot 10 + y \cdot 1 \\ x + y = 14 \end{cases}$  metodą przeciwnych współczynników:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 10y + x + 18 = 10x + y \\ x + y = 14 \end{cases} \\ &\begin{cases} 10y - y + x - 10x = -18 \\ x + y = 14 \end{cases} \\ &\begin{cases} 9y - 9x = -18 \quad /: 9 \\ x + y = 14 \end{cases} \\ &+ \begin{cases} y - x = -2 \\ x + y = 14 \end{cases} \\ &y - x + x + y = -2 + 14 \\ &2y = 12 \\ &y = 6 \end{aligned}$$

Korzystamy z równania  $x + y = 14$  i obliczamy  $x$ :

$$x + 6 = 14$$

$$x = 8$$

Liczba,  $a$  jest równa 86.

### Zadanie 21. (0–3)

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;<br>IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych. |

### Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie dystansu, jaki pokona pies: 120 m.

2 pkt – ustalenie, że musi się odbyć 30 cykli,

ALBO

zapisanie równania  $\frac{(x-30)t}{3} = \frac{xt}{4}$

1 pkt – ustalenie, że w jednym cyklu różnica odległości między zwierzętami zmniejsza się o 1 m,

ALBO

wyznaczenie prędkości obu zwierząt  $v_p = \frac{4}{t}$  oraz  $v_l = \frac{3}{t}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

W czasie, gdy pies pokonuje dystans 4 m, wykonując dwa skoki, lis pokonuje 3 m. Zatem po każdym cyklu dystans między zwierzętami zmniejsza się o 1 m. Wynika z tego, że dystans 30 m zostanie zniwelowany po 30 cyklach. W tym czasie lis przebiegnie  $30 \cdot 3 = 90$  metrów, a pies  $30 \cdot 4 = 120$  metrów.

*Sposób II*

Niech  $t$  oznacza czas, w którym pies skacze dwa razy, więc przebywa drogę długości 4 m. W tym czasie lis przebywa drogę długości 3 m. Niech  $v_p$  oznacza prędkość psa, a  $v_l$  – prędkość lisa.

Zachodzą więc równości

$$v_p = \frac{4}{t} \text{ oraz } v_l = \frac{3}{t}$$

Jeśli przez  $T$  oznaczymy czas, po jakim pies dogoni lisa, zaś przez  $x$  dystans, który przebiegnie pies, mamy zależności czasu dla obu zwierząt.

Dla lisa:

$$T = \frac{x - 30}{v_l} = \frac{x - 30}{\frac{3}{t}} = \frac{(x - 30)t}{3}$$

Dla psa:

$$T = \frac{x}{v_p} = \frac{x}{\frac{4}{t}} = \frac{xt}{4}$$

Przyrównując obie wielkości, otrzymujemy równanie:

$$\frac{(x - 30)t}{3} = \frac{xt}{4}$$

Z warunków zadania wynika, że  $t \neq 0$ , zatem możemy przekształcić to równanie do postaci

$$4(x - 30) = 3x$$

Rozwiązaniem tego równania jest  $x = 120$ .

Pies przebiegnie dystans 120 metrów.

**Zadanie 22. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;<br>IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – rozwiązanie układu równań i podanie prawidłowego wyniku:  $a = 255$ ,  $b = 272$

1 pkt – zapisanie układu równań  $\begin{cases} a + b = 527 \\ 0,08 a = 0,075 b \end{cases}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zgodnie z warunkami zadania możemy zapisać dwa równania:

$$\begin{cases} a + b = 527 \\ 0,08 a = 0,075 b \end{cases}$$

Wyznamy z pierwszego równania  $b = 527 - a$  i podstawmy do równania drugiego:

$$0,08 a = 0,075(527 - a)$$

Rozwiązaniem tego równania jest  $a = 255$ .

Zatem  $b = 527 - 255 = 272$

**Zadanie 23. (0–4)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych | Uczeń:<br>IV.3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci<br>$\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$<br>lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$ |

**Zasady oceniania**

4 pkt – obliczenie obu niewiadomych  $x$  i  $y$  i zapisanie obu rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$$

3 pkt – rozwiązanie równania kwadratowego:  $x = -2$  lub  $x = 2$

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą  $x$  lub  $y$ , np.:

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 4x + 4(2x - 1) - 17 = 0$$

$$\text{lub } \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 4\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right) + 4y - 17 = 0$$

1 pkt – wyznaczenie podstawienia za jedną z niewiadomych  $x$  lub  $y$ , np:  $y = 2x - 1$  lub

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Z równania liniowego wyznaczamy podstawienie za jedną z niewiadomych, np.  $y$ .

$$y = 2x - 1$$

Podstawiamy  $y = 2x - 1$  do drugiego równania stopnia drugiego i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą  $x$ .

$$x^2 + (2x - 1)^2 - 4x + 4(2x - 1) - 17 = 0$$

$$5x^2 - 20 = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

Rozwiązaniami równania kwadratowego są:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$

Obliczamy drugą niewiadomą i zapisujemy rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 - 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 1 \end{cases}$$

Rozwiązaniami układu równań są dwie pary liczb  $\begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$  oraz  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

## V. Funkcje

## Zadanie 24. (0–2)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje). |

## Zasady oceniania

2 pkt – poprawne dokończenia dwóch zdań.

1 pkt – poprawne dokończenie jednego zdania.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

## Rozwiązanie

1.B

2.H

## Komentarz

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej:  $y = f(x) = (x - p)^2 + q$ ,  
gdzie

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Obliczamy wyróżnik funkcji kwadratowej  $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$ :

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

a następnie obliczamy wartości  $p$  oraz  $q$ :

$$p = -\frac{5}{2}, \quad q = -\frac{1}{4}$$

Zatem postać kanoniczna tej funkcji jest równa:  $y = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej:  $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji kwadratowej  $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$ :  $\Delta = 25 - 24 = 1$

$$x_1 = \frac{-5 - 1}{2} = -3, \quad x_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2$$

Zatem postać iloczynowa tej funkcji jest równa:  $y = (x + 3)(x + 2)$ .



**Zadanie 25.1. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 25.2. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 25.3. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

$x \in (1, 6)$  lub  $(1, 6)$

**Zadanie 26.1. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Uczeń:<br>V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

PF

*Komentarz*

Różnica wysokości między Rysami i Zakopanem to  $2499 \text{ m} - 1000 \text{ m} = 1499 \text{ m}$ .

Przy takiej różnicy temperatura spadnie o  $14,99 \cdot 0,6 \text{ }^\circ\text{C} = 8,994 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Różnica wysokości między Zakopanem i Białką Tatrzańską to  $1000 \text{ m} - 650 \text{ m} = 350 \text{ m}$

Przy takiej różnicy temperatura wzrośnie o  $3,5 \cdot 0,6 \text{ }^\circ\text{C} = 2,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Zadanie 26.2. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – rozwiązanie układu równań i obliczenie współczynników:  $a = -0,006$ ,  $b = 19$

1 pkt – obliczenie temperatury dla wysokości różnej od 1000 metrów, np. 1500 metrów

$$\text{i zapisanie układu równań: } \begin{cases} 13 = 1000 a + b \\ 10 = 1500 a + b \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Do rozwiązania układu równań z dwiema niewiadomymi potrzebujemy dwóch równań. Pierwsze równanie uzyskamy, podstawiając dane dla Zakopanego:  $13 = 1000 a + b$ . W celu otrzymania drugiego równania obliczamy temperaturę dla wysokości różnej od 1000 m, np. dla 1500 m otrzymujemy  $10 = 1500 a + b$ .

Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 13 = 1000 a + b \\ 10 = 1500 a + b \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest para:  $\begin{cases} a = -0,006 \\ b = 19 \end{cases}$

**Zadanie 27. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);<br>III.4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

FP

**Zadanie 28. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>V.8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);<br>V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – obliczenie współczynnika  $a$  i zapisanie funkcji w postaci iloczynowej:

$$f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$$

1 pkt – obliczenie drugiego miejsca zerowego:  $x_2 = 6$

ALBO

$$\text{zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć } a \text{ i } q: \begin{cases} 0 = a(2 - 4)^2 + q \\ 8 = a(0 - 4)^2 + q \end{cases}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Punkt przecięcia osi symetrii funkcji kwadratowej z osią  $Ox$  jest środkiem odcinka łączącego jej miejsca zerowe, zatem

$$4 = \frac{2 + x_2}{2}$$

Stąd  $x_2 = 6$ .

Obliczamy współczynnik  $a$  funkcji, zapisując postać iloczynową funkcji z podstawionymi wartościami  $x_1, x_2$  oraz współrzędnymi punktu  $(0, 8)$ :

$$8 = a(0 - 2)(0 - 6)$$

$$\text{Stąd } a = \frac{2}{3}$$

Postać iloczynowa szukanej funkcji to  $f(x) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$ .

*Sposób II*

Ponieważ osią symetrii szukanej funkcji kwadratowej jest prosta  $x = 4$ , możemy stwierdzić, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej jej wykresem to  $p = 4$ . Postać kanoniczna tej funkcji to

$$y = a(x - 4)^2 + q$$

Do wykresu funkcji należą dwa punkty:  $(0, 8)$  oraz  $(2, 0)$ . Podstawiając ich współrzędne do powyższego wzoru, otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 0 = a(2 - 4)^2 + q \\ 8 = a(0 - 4)^2 + q \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu są liczby  $a = \frac{2}{3}$  oraz  $q = -\frac{8}{3}$

Możemy zapisać postać kanoniczną szukanej funkcji:  $y = \frac{2}{3}(x - 4)^2 - \frac{8}{3}$

$$y = \frac{2}{3}(x - 4)^2 - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}[(x - 4)^2 - 4] = \frac{2}{3}(x - 4 + 2)(x - 4 - 2) = \frac{2}{3}(x - 2)(x - 6)$$

### Zadanie 29. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel. | Uczeń:<br>V.13) postępuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$ , w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych. |

### Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

### Rozwiązanie

PP

### Komentarz

Cała praca zajmie  $3 \cdot 8 = 24$  roboczogodzin. Rozdzielając ją na dwa ciągniki, uzyskujemy wynik 12 roboczogodzin dla każdego z nich.

Przy zwiększeniu prędkości o połowę (1,5 prędkości początkowej) czas potrzebny na zaoranie pola będzie równy  $24 : 1,5 = 16$  roboczogodzin. Rozdzielając je między cztery ciągniki, otrzymujemy 4 godziny pracy dla każdego z nich.

## VI. Ciągi

## Zadanie 30. (0–1)

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe   |
|--|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Uczeń:<br>VI.4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. |

## Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

## Rozwiązanie

B3

*Komentarz*

Nie istnieje ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są liczby  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = 4$ ,  $c = 4\sqrt{2}$ .

Gdyby taki ciąg istniał, miałby on stałą różnicę  $r \in R$  oraz istniałyby liczby całkowite  $k$  i  $l$ , dla których

$$c - b = k \cdot r \quad \text{oraz} \quad b - a = l \cdot r$$

Iloraz  $\frac{k}{l}$  musiałby być wówczas liczbą wymierną.

$$\frac{k}{l} = \frac{\frac{c-b}{r}}{\frac{b-a}{r}} = \frac{c-b}{r} \cdot \frac{r}{b-a} = \frac{c-b}{b-a}$$

Podstawiając wartości liczbowe, mamy

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{4\sqrt{2}-4}{4-\sqrt{2}} = \frac{(4\sqrt{2}-4) \cdot (4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2}) \cdot (4+\sqrt{2})} = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

Widać więc, że iloraz  $\frac{k}{l}$  nie należy do zbioru liczb wymiernych, zatem nie występuje taki ciąg arytmetyczny, dla którego zadane liczby mogłyby być jego wyrazami.

**Zadanie 31. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>VI.5) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą  $a_1$  i jego rozwiązanie oraz podanie prawidłowego wyniku:  $a_1 = 2$

1 pkt – zapisanie równania zawierającego tylko dwie zmienne:  $a_1, r$ , np.

$$5a_1 + 35r = 3 \cdot (5a_1 + 10r)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zapisując warunki zadania, mamy:

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

Korzystając ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego, otrzymamy zależność:

$$5a_1 + 35r = 3 \cdot (5a_1 + 10r)$$

Po podstawieniu wartości  $r = 4$ , mamy równanie

$$5a_1 + 140 = 3 \cdot (5a_1 + 40)$$

$$5a_1 + 140 = 15a_1 + 120$$

Dzieląc obie strony równania przez 5, otrzymujemy równanie

$$a_1 + 28 = 3a_1 + 24$$

Przekształcając je, otrzymujemy kolejno

$$a_1 - 3a_1 = 24 - 28$$

$$-2a_1 = -4$$

$$a_1 = 2$$

Pierwszym wyrazem danego ciągu jest liczba 2.

**Zadanie 32. (0–3)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>VI.6) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – rozwiązanie równania i obliczenie liczby wyrazów ciągu:  $n = 6$

2 pkt – zapisanie równania

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

1 pkt – obliczenie wartości pierwszego wyrazu ciągu:  $a_1 = 1$

ALBO

zapisanie równania

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Niech  $n$  oznacza liczbę wszystkich wyrazów skończonego ciągu geometrycznego.

Korzystając ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego, mamy

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\frac{1}{9} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Obliczamy stąd  $a_1 = 1$ .

Następnie stosujemy wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymując równanie

$$\frac{364}{243} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

Rozwiązując to równanie, mamy kolejno

$$\frac{364}{243} = \frac{3^n - 1}{3^n} \cdot \frac{3}{2}$$

$$728 \cdot 3^n = 729 \cdot (3^n - 1)$$

$$3^n = 729$$

$$n = 6$$

Ten ciąg geometryczny składa się z 6 wyrazów.



**Zadanie 33. (0–4)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zapisanie dwóch rozwiązań:  $x = 38, y = 38, z = 38$  oraz  $x = 2, y = 14, z = 98$

3 pkt – obliczenie dwóch ilorazów ciągu geometrycznego:  $q = 1$  lub  $q = 7$

ALBO

obliczenie dwóch różnic ciągu arytmetycznego:  $r = 0$  lub  $r = 4$

2 pkt – zapisanie sumy ciągu geometrycznego  $a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 24r) = 114$  oraz warunku ciągu geometrycznego  $(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$

ALBO

zapisanie równania pozwalającego obliczyć iloraz ciągu geometrycznego:

$$q^2 - 8q + 7 = 0$$

1 pkt – zapisanie sumy ciągu geometrycznego  $a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 24r) = 114$  albo warunku ciągu geometrycznego  $(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$

ALBO

zapisanie warunków na różnice między wyrazami ciągu arytmetycznego:

$$bq - b = 3r \text{ oraz } bq^2 - bq = 21r$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Niech  $r$  będzie różnicą ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ . Z warunków zadania wynika, że liczby  $a_1, a_4, a_{25}$  tworzą ciąg geometryczny. Zapisując informację o sumie ciągu geometrycznego, otrzymujemy równanie

$$a_1 + a_4 + a_{25} = 114$$

Stosujemy wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i podstawiamy do otrzymanego równania:

$$a_1 + (a_1 + 3r) + (a_1 + 24r) = 114$$

Drugie równanie otrzymujemy korzystając z własności ciągu geometrycznego:

$$a_4^2 = a_1 \cdot a_{25}$$

Stosujemy ponownie wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$(a_1 + 3r)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 24r)$$

## Zasady oceniania. Ciągi

Następnie należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 3a_1 + 27r = 114 \\ a_1^2 + 6a_1r + 9r^2 = a_1^2 + 24a_1r \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3a_1 = 114 - 27r \\ 18a_1r - 9r^2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 38 - 9r \\ 18(38 - 9r)r - 9r^2 = 0 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie, mamy

$$684r - 171r^2 = 0$$

$$4r - r^2 = 0$$

Rozwiązaniami są  $r = 0$  oraz  $r = 4$ .

Jeśli  $r = 0$ , mamy do czynienia z ciągiem stałym, w którym każdy wyraz ciągu jest równy 38. Szukanymi liczbami są wtedy  $x = 38$ ,  $y = 38$ ,  $z = 38$ .

Dla  $r = 4$  mamy  $x = a_1 = 2$ ,  $y = a_4 = 2 + 3 \cdot 4 = 14$ ,  $z = a_{25} = 2 + 24 \cdot 4 = 98$ .

### Sposób II

Oznaczmy wyrazy ciągu geometrycznego przez  $x = b$ ,  $y = bq$  oraz  $z = bq^2$ , gdzie  $q$  jest ilorazem tego ciągu.

Z warunków zadania wynika, że są one pierwszym, czwartym i dwudziestym piątym wyrazem ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , zatem  $x = a_1$ ,  $y = a_4$ ,  $z = a_{25}$ . Jeśli za  $r$  przyjmiemy różnicę tego ciągu, możemy zapisać różnice pomiędzy tymi wyrazami jako:

$$y - x = bq - b = 3r \quad \text{oraz} \quad z - y = bq^2 - bq = 21r$$

Zauważmy, że

$$bq^2 - bq = 21r = 7 \cdot 3r = 7 \cdot (bq - b)$$

Otrzymujemy zatem równanie

$$bq^2 - bq = 7bq - 7b$$

Z warunków zadania wiemy, że  $b \neq 0$ , więc możemy to równanie doprowadzić do postaci

$$q^2 - 8q + 7 = 0$$

Pierwiastkami tego równania są liczby 1 oraz 7.

Zapisując warunek na sumę ciągu geometrycznego, mamy

$$b + bq + bq^2 = 114$$

Dla  $q = 1$  mamy

$$3b = 114$$

Zatem  $b = 38$ , czyli  $x = 38$ ,  $y = 38$ ,  $z = 38$ . Szukany ciąg to  $(38, 38, 38)$ .

Dla  $q = 7$  mamy

$$b + 7b + 49b = 114$$

$$57b = 114$$

Rozwiązaniem tego równania jest  $b = 2$ . W tym przypadku  $x = 2$ ,  $y = 14$ ,  $z = 98$ .

Szukany ciąg ma postać  $(2, 14, 98)$ .

### Zadanie 34. (0–4)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych. | Uczeń:<br>VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym. |

### Zasady oceniania

4 pkt – zapisanie dwóch ciągów:  $(50, 8, -34)$  oraz  $(2, 8, 14)$

3 pkt – rozwiązanie układu równań:  $\begin{cases} r = -42 \\ a_1 = 50 \end{cases}$  oraz  $\begin{cases} r = 6 \\ a_1 = 2 \end{cases}$

ALBO

zapisanie jednego z dwóch ciągów:  $(50, 8, -34)$  albo  $(2, 8, 14)$

2 pkt – obliczenie środkowego wyrazu ciągu arytmetycznego:  $b = 8$

ALBO

zapisanie warunków na sumę ciągu arytmetycznego i warunku ciągu geometrycznego:  $a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 24$  oraz  $(a_1 + r + 10)^2 = (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 2r + 40)$

1 pkt – zapisanie warunku na sumę ciągu arytmetycznego:

$$(b - r) + b + (b + r) = 24 \text{ lub } a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 24$$

ALBO

zapisanie warunku ciągu geometrycznego:

$$(a_1 + r + 10)^2 = (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 2r + 40)$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Trzy liczby, tworzące ciąg arytmetyczny o różnicy  $r$ , oznaczmy przez  $b - r$ ,  $b$ ,  $b + r$ .

Zapisując warunek na sumę tego ciągu, możemy zauważyć, że

$$(b - r) + b + (b + r) = 24$$

$$3b = 24$$

$$b = 8$$

Zatem ciąg arytmetyczny ma postać:  $(8 - r, 8, 8 + r)$ .

Po dodaniu kolejno do jego wyrazów liczb 4, 10, 40, otrzymujemy ciąg geometryczny:

$$(12 - r, 18, 48 + r)$$

Korzystając z własności ciągu geometrycznego, zapisujemy równanie:

$$18^2 = (12 - r) \cdot (48 + r)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + 36r - 252 = 0$$

Posiada ono dwa rozwiązania:  $(-42)$  oraz  $6$ .

Gdy  $r = -42$ , wówczas szukany ciąg arytmetyczny jest  $(50, 8, -34)$ .

W przypadku, gdy  $r = 6$ , mamy ciąg arytmetyczny  $(2, 8, 14)$ .

### Sposób II

Niech  $(a_n)$  będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy  $r$ . Wtedy sumę tego ciągu możemy zapisać jako

$$a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) = 24$$

Mamy stąd zależność

$$a_1 = 8 - r$$

Z warunków zadania mamy, że liczby  $a_1 + 4$ ,  $a_1 + r + 10$ ,  $a_1 + 2r + 40$  tworzą ciąg geometryczny. Korzystając z jego własności, otrzymujemy kolejną zależność:

$$(a_1 + r + 10)^2 = (a_1 + 4) \cdot (a_1 + 2r + 40)$$

Po podstawieniu  $a_1 = 8 - r$  otrzymujemy

$$18^2 = (12 - r) \cdot (48 + r)$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + 36r - 252 = 0$$

Posiada ono dwa rozwiązania:  $(-42)$  oraz  $6$ .

Gdy  $r = -42$ , wówczas  $a_1 = 50$ , zaś kolejne liczby tego ciągu to  $8$  i  $(-34)$ .

W przypadku, gdy  $r = 6$ , mamy  $a_1 = 2$ , a kolejne wyrazy ciągu to  $8$  i  $14$ .

Szukanymi ciągami arytmetycznymi są:  $(50, 8, -34)$  oraz  $(2, 8, 14)$ .

**Zadanie 35.1. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>VI.5) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |

**Zasady oceniania**1 pkt – poprawne obliczenie wyrazu  $a_{25} = 900$  zł

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zauważmy, że comiesięczne wpłaty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym  $a_1 = 300$  i  $r = 25$ . Stosujemy wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i obliczamy wyraz  $a_{25}$ :

$$a_{25} = 300 + 24 \cdot 25 = 900 \text{ zł}$$

**Zadanie 35.2. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>VI.5) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. |

**Zasady oceniania**2 pkt – obliczenie różnicy ciągu:  $r = 32$  zł

1 pkt – zapisanie równania:

$$\frac{2 \cdot 300 + 60r}{2} \cdot 61 = 76\,860$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Zauważmy, że comiesięczne wpłaty są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, w którym  $a_1 = 300$ . Stosujemy wzór na sumę kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy równanie prowadzące do obliczenia różnicy  $r$  ciągu

$$\frac{2 \cdot 300 + 60r}{2} \cdot 61 = 76\,860$$

Rozwiązaniem równania jest  $r = 32$ .

Pani Joanna powinna okładać każdego miesiąca kwotę o 32 złote większą niż w miesiącu poprzednim.

## VII. Trygonometria

## Zadanie 36. (0–3)

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>VII.2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;<br>VII.6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty). |

## Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie równania z niewiadomą  $x$ :  $x = 174,06$  (po zaokrągleniu do pełnych metrów:  $x = 174$  m)

2 pkt – zauważenie, że kąt  $WSK$  jest równy kątowi depresji jako kąty naprzemianległe i zapisanie miary kąta  $WSK$ :  $|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$

ORAZ

$$\text{zapisanie równania } \frac{136}{x} = \text{tg } 38^\circ$$

ORAZ

$$\text{odczytanie z tablic i zapisanie: } \text{tg } 38^\circ = 0,7813$$

1 pkt – zauważenie, że kąt  $WSK$  jest równy kątowi depresji jako kąty naprzemianległe i zapisanie miary kąta  $WSK$ :  $|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$

ALBO

$$\text{odczytanie z tablic i zapisanie: } \text{tg } 38^\circ = 0,7813$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Zauważmy, że kąt  $WSK$  jest równy kątowi depresji jako kąty naprzemianległe.

$$|\sphericalangle WSK| = 38^\circ$$

Zatem

$$\frac{136}{x} = \text{tg } 38^\circ$$

Z tablic wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy wartość tangensa kąta  $38^\circ$  i zapisujemy równanie

$$\text{tg } 38^\circ = 0,7813$$

$$\frac{136}{x} = 0,7813$$

Rozwiązaniem równania jest:  $x = 174,06$

Po zaokrągleniu do pełnych metrów:  $x = 174$  m

Samolot znajduje się w odległości 174 metrów od wieży.

**Zadanie 37.1. (0–2)**

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>VII.4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ [...];<br>VII. 5) stosuje [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ ;<br>VIII.2) [...] stosuje [...] twierdzenie cosinusów;<br>VIII.7) stosuje twierdzenia: [...] o dwusiecznej kąta. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości boków  $AD$ ,  $AE$  oraz podanie

$$\text{wyników: } |AE| = 8\sqrt{10}, |AD| = 6\sqrt{10}$$

1 pkt – wyznaczenie i zapisanie zależności pomiędzy długościami dwóch boków trójkąta

$$ADE : |AD| \cdot |AE| = 480$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Niech  $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ . Ponieważ  $P_{\triangle ADE} = 2 \cdot P_{\triangle ABC}$  oraz  $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$

i  $P_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \alpha$ , zatem mamy

$$\frac{1}{2} |AD| \cdot |AE| \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$$

Stąd

$$|AD| \cdot |AE| = 2 \cdot |AB| \cdot |AC|$$

Po wstawieniu długości boków  $|AB| = 24$ ,  $|AC| = 10$  mamy

$$|AD| \cdot |AE| = 2 \cdot 24 \cdot 10$$

$$|AD| \cdot |AE| = 480$$

Stosując twierdzenie o dwusiecznej dla trójkąta  $ADE$ , otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DP|}{|PE|} = \frac{3}{4}$$

$$|AD| = \frac{3}{4} |AE|$$

Uwzględniając obie te zależności, otrzymujemy:

$$\frac{3}{4} |AE| \cdot |AE| = 480$$

$$|AE|^2 = 640$$

Zatem

$$|AE| = 8\sqrt{10}$$

oraz

$$|AD| = \frac{3}{4}|AE| = \frac{3}{4} \cdot 8\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

### Zadanie 37.2. (0–3)

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>2) Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>VII.4) korzysta ze wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ [...]<br>VII.5) stosuje [...] wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ . |

### Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości boku  $BC$  i podanie prawidłowego wyniku:  $|BC| = 2\sqrt{73}$

2 pkt – obliczenie wartości cosinusa kąta przy wierzchołku  $A$ :  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  i zastosowanie jej w twierdzeniu cosinusów do obliczenia długości boku  $BC$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha$$

ALBO

obliczenie długości odcinka  $FB$  i zapisanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AFC$ .

1 pkt – obliczenie wartości sinusa kąta przy wierzchołku  $A$ :  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$

ALBO

obliczenie wysokości trójkąta  $ABC$ :  $h = 6$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Niech  $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ . Wiemy, że  $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha = 72$

Stąd

$$\sin \alpha = \frac{72 \cdot 2}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{144}{10 \cdot 24} = \frac{3}{5}$$

Ponieważ cosinus kąta ostrego jest dodatni, korzystając z jedynej trygonometrycznej, obliczamy

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$



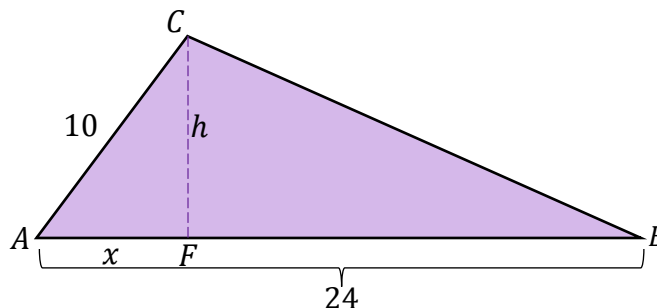
Z twierdzenia cosinusów mamy

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha = 10^2 + 24^2 - 2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot \frac{4}{5} = 292$$

Zatem długość odcinka  $BC$  jest równa  $2\sqrt{73}$ .

### Sposób II

Niech  $h$  będzie wysokością trójkąta  $ABC$  opuszczoną z wierzchołka  $C$ , punkt  $F$  – jej spodkiem, a  $x$  – długością odcinka  $AF$  (zobacz rysunek).



Ze wzoru na pole trójkąta  $ABC$  otrzymujemy równanie:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CF| = 72$$

$$\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot h = 72$$

Stąd  $h = 6$ .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AFC$ , mamy:

$$|AF|^2 + |FC|^2 = |AC|^2$$

$$x^2 + 6^2 = 10^2$$

$$x^2 = 64$$

Zatem długość odcinka  $AF$  jest równa 8.

Obliczamy długość odcinka  $FB$ :

$$|FB| = 24 - 8 = 16$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BFC$ , mamy:

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |BC|^2$$

$$16^2 + 6^2 = |BC|^2$$

$$|BC|^2 = 292$$

Zatem długość odcinka  $BC$  jest równa  $2\sqrt{73}$ .

## VIII. Planimetria

## Zadanie 38. (0–2)

| Wymagania ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>3) Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. | Uczeń:<br>VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności. |

## Zasady oceniania

2 pkt – zaznaczenie dwóch poprawnych odpowiedzi.

1 pkt – zaznaczenie jednej lub dwóch odpowiedzi, z których jedna jest poprawna: B albo D.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

## Rozwiązanie

BD

## Komentarz

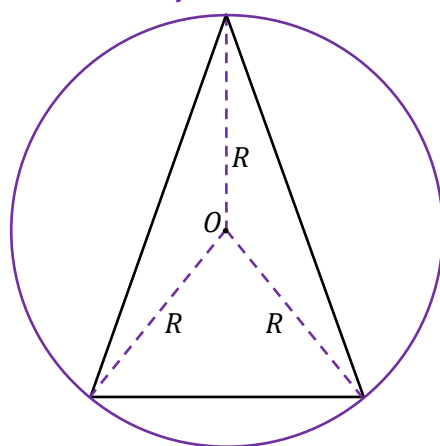
Okrąg opisany na trójkącie to okrąg, na którym leżą wszystkie wierzchołki tego trójkąta. Zatem odległość środka  $O$  okręgu od każdego z wierzchołków trójkąta jest równa promieniowi  $R$  tego okręgu. Tym samym punkt  $O$  jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta (zobacz rysunek 1. poniżej).

Ortocentrum, czyli punkt przecięcia wszystkich wysokości trójkąta, jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków tego trójkąta tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

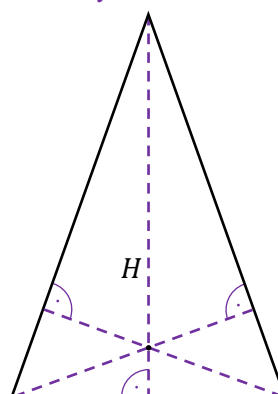
Podobnie, ortocentrum jest równo oddalone od wszystkich boków tego trójkąta tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

Ponieważ trójkąt równoramienny ma jedną oś symetrii, jego ortocentrum jest równo odległe tylko od ramion trójkąta (zobacz rysunek 2. poniżej).

Rysunek 1.



Rysunek 2.



**Zadanie 39. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;<br>VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;<br>VIII.7) stosuje twierdzenia: [...] o kącie między styczną a cięciwą. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

*Komentarz*

Bok ośmiokąta foremnego jest jedną z cięciw okręgu opisanego na tym ośmiokącie. Kąt  $\alpha$  jest kątem między styczną do okręgu w punkcie  $A$ , a cięciwą  $AB$  wychodzącą z punktu styczności. Z twierdzenia o mierze kąta między styczną a cięciwą wynika, że miara kąta  $\alpha$  jest równa mierze kąta wpisanego opartego na boku  $AB$  rozważanego ośmiokąta foremnego. Ponieważ ten kąt wpisany ma miarę równą połowie miary kąta środkowego opartego na boku  $AB$  ośmiokąta foremnego, więc miara kąta  $\alpha$  jest równa  $\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{8} = 22,5^\circ$ .

**Zadanie 40. (0–1)**

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1) Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>3) Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Uczeń:<br>VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach [...].<br>VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.<br>VII.6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty). |

**Zasady oceniania**

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

PP

**Komentarz**

Ponieważ  $BC \parallel DG$ , to kąty odpowiadające  $AGD$  i  $ACB$  mają równe miary. Zatem  $|\sphericalangle AGD| = |\sphericalangle ACB| = 45^\circ$ .

Ponieważ kwadrat  $DEFG$  ma pole równe 1, więc każdy z jego boków ma długość 1.

Ponieważ trójkąt  $GFC$  jest prostokątny, równoramienny, o przyprostokątnych długości 1, to  $|GC| = \sqrt{2}$ .

Niech  $|EB| = x$ . Wówczas  $|BC| = 2 + x$ . Ponieważ  $|AC| = |BC|$ , to  $|AG| = |AC| - |GC| = 2 + x - \sqrt{2}$ . Stąd  $|AG| - |EB| = 2 - \sqrt{2}$ .

**Zadanie 41. (0–2)**

| Wymagania ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;<br>VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne [...];<br>VIII.7) stosuje twierdzenia: Talesa [...]. |

**Zasady oceniania**

*Dla rozwiązania sposobem I:*

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości odcinka  $TU$  oraz podanie

poprawnego wyniku:  $|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta  $STR$ , np.  $1^2 + |TR|^2 = 4^2$   
 ALBO

zastosowanie twierdzenia Talesa do odcinków  $TU, TR, SQ, SR$ , np.  $\frac{|TU|}{|TR|} = \frac{1}{4}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

*Dla rozwiązania sposobem II:*

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia długości odcinka  $TU$  oraz podanie

poprawnego wyniku:  $|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o stycznej i siecznej, np.  $5 \cdot 3 = |TR|^2$   
 ALBO

zapisanie równania wynikającego z proporcjonalności długości boków  $TR, SR, UR, QR$  trójkątów podobnych  $TSR$  i  $UQR$ , np.  $\frac{|TR|}{|SR|} = \frac{|UR|}{|QR|}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Z warunku  $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$  wynika, że  $|QR| = 3$ , więc  $|SR| = |SQ| + |QR| = 1 + 3 = 4$ .

Stosując teraz twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $STR$ , otrzymujemy kolejno

$$|ST|^2 + |TR|^2 = |SR|^2$$

$$1^2 + |TR|^2 = 4^2$$

$$|TR|^2 = 15$$

$$|TR| = \sqrt{15}$$

Ponieważ  $ST \parallel QU$ , więc stosujemy twierdzenie Talesa i obliczamy  $|TU|$ :

$$\frac{|TU|}{|TR|} = \frac{|SQ|}{|SR|}$$

$$\frac{|TU|}{\sqrt{15}} = \frac{1}{4}$$

$$|TU| = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

*Sposób II*

Ponieważ  $\frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{2}{3}$  i promień okręgu jest równy 1, więc:  $|PQ| = 2$ ,  $|QR| = 3$ ,  $|PR| = 5$ ,  $|SR| = 4$ . Stosujemy twierdzenie o stycznej i siecznej i obliczamy  $|TR|$ :

$$|PR| \cdot |QR| = |TR|^2$$

$$5 \cdot 3 = |TR|^2$$

$$|TR| = \sqrt{15}$$

Trójkąt  $TSR$  jest podobny do trójkąta  $UQR$ , ponieważ odcinki  $TS$  i  $UQ$  są równoległe, a kąt przy wierzchołku  $R$  jest wspólny. Z podobieństwa tych trójkątów wynika proporcjonalność długości odpowiednich boków tych trójkątów:

$$\frac{|TR|}{|SR|} = \frac{|UR|}{|QR|}$$

$$\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{|UR|}{3}$$

$$|UR| = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Zatem

$$|TU| = |TR| - |UR| = \sqrt{15} - \frac{3\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

**Zadanie 42. (0–3)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>VIII.1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięwiw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;<br>VIII.2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne [...];<br>VIII.6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu. |

**Zasady oceniania**

3 pkt – obliczenie stosunku pola kwadratu do pola wycinka kołowego:  $\frac{8}{5\pi}$

2 pkt – wyznaczenie zależności między promieniem okręgu  $r$  i długością boku kwadratu  $ABCD$ , np.  $r = x\sqrt{5}$

1 pkt – wyznaczenie długości odcinka  $AS$  lub długości odcinka  $BS$  w zależności od długości  $x$  boku kwadratu  $ABCD$ :  $|AS| = x$  (lub  $|BS| = 2x$ )

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Niech  $r$  oznacza promień koła i oznaczmy przez  $x$  długość boku kwadratu.

Ponieważ trójkąt  $SAD$  jest prostokątny i równoramienny, więc  $|AS| = |AD| = x$ . Stąd

$$|BS| = |AB| + |AS| = 2x$$

Prowadzimy promień  $SC$  i otrzymujemy trójkąt prostokątny  $SBC$ , do którego stosujemy twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|BC|^2 + |BS|^2 = |CS|^2$$

$$x^2 + (2x)^2 = r^2$$

$$5x^2 = r^2$$

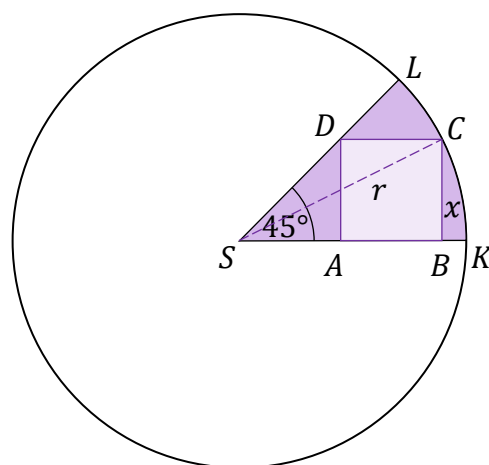
$$r = x\sqrt{5}$$

Wyznaczamy pole  $P_{KSL}$  wycinka kołowego  $KSL$  w zależności od  $x$ :

$$P_{KSL} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{8} \pi r^2 = \frac{1}{8} \pi (x\sqrt{5})^2 = \frac{5}{8} \pi x^2$$

Obliczamy stosunek pola kwadratu do pola wycinka kołowego  $KSL$ :

$$\frac{x^2}{\frac{5}{8} \pi x^2} = \frac{8}{5\pi}$$



**Zadanie 43. (0–4)**

| Wymagania ogólne   | Wymagania szczegółowe  |
|--|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.<br>IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Uczeń:<br>VII.6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych [...].<br>VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezów.<br>VIII.9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia pola trapezu  $DCFG$  i zapisanie

$$\text{poprawnego wyniku: } P = \frac{27}{4} \sqrt{3}$$

3 pkt – obliczenie długości podstawy  $FG$  trapezu  $DCFG$ :  $|FG| = 3$  oraz jego wysokości

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ALBO

$$\text{obliczenie skali podobieństwa trapezów: } k = \frac{1}{2}$$

2 pkt – obliczenie skali podobieństwa trapezów:  $k = \frac{1}{2}$

ALBO

$$\text{obliczenie pola trapezu } ABCD: 27\sqrt{3}$$

1 pkt – obliczenie długości podstaw trapezu  $ABCD$ :  $|AB| = 12$ ,  $|CD| = 6$  oraz jego wysokości  $H = 3\sqrt{3}$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

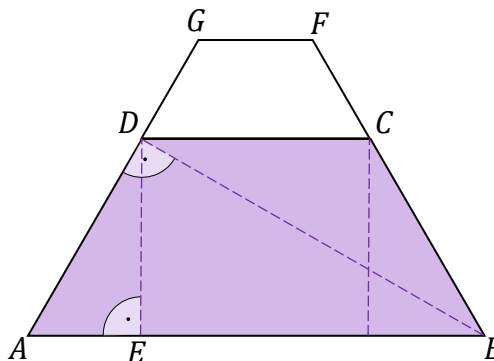
**Przykładowe pełne rozwiązanie***Sposób I*

Opuszczamy z wierzchołka  $D$  wysokość  $DE$  trapezu  $ABCD$ . Korzystamy z własności trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  i otrzymujemy:  $|AB| = 12$ ,  $|BD| = 6\sqrt{3}$ .

Korzystamy z własności trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  i otrzymujemy:  $|AE| = 3$ ,  $|DE| = 3\sqrt{3}$ .

Obliczamy długość górnej podstawy trapezu  $ABCD$ :

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 12 - 2 \cdot 3 = 6$$



Trapezy  $CDFG$  i  $ABCD$  są podobne, więc skala  $k$  podobieństwa jest równa stosunkowi długości dolnych podstaw tych trapezów:

$$k = \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Korzystając z podobieństwa obu trapezów, obliczamy długość górnej podstawy trapezu  $DCFG$  oraz wysokość  $h$  tego trapezu:

$$|GF| = \frac{1}{2} \cdot |DC| = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Obliczamy pole  $P_{DCFG}$  trapezu  $DCFG$ :

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6 + 3) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

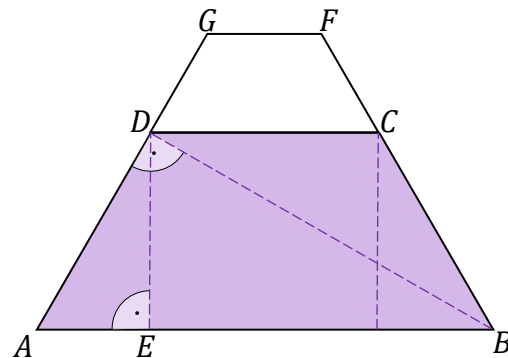
### Sposób II

Opuszczamy z wierzchołka  $D$  wysokość  $DE$  trapezu  $ABCD$ . Korzystamy z własności trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  i otrzymujemy  $|AB| = 12$ .

Korzystamy z własności trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  i otrzymujemy:  $|AE| = 3$ ,  $|DE| = 3\sqrt{3}$ .

Obliczamy długość górnej podstawy trapezu  $ABCD$ :

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AE| = 12 - 2 \cdot 3 = 6$$



Trapezy  $CDFG$  i  $ABCD$  są podobne, więc skala  $k$  podobieństwa jest równa stosunkowi długości dolnych podstaw tych trapezów:

$$k = \frac{|DC|}{|AB|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Obliczamy pole  $P_{ABCD}$  trapezu  $ABCD$ :

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} (|AB| + |DC|) \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot (12 + 6) \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

Korzystamy z twierdzenia o polach figur podobnych i obliczamy pole  $P_{DCFG}$  trapezu  $DCFG$ :

$$\frac{P_{DCFG}}{P_{ABCD}} = k^2$$

$$\frac{P_{DCFG}}{27\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P_{DCFG} = \frac{27}{4}\sqrt{3}$$



**Zadanie 44. (0–2)**

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe                                |
|--|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkietapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Uczeń:<br>VIII.12) przeprowadza dowody geometryczne. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – spełnienie kryterium za 1 pkt zasad oceniania oraz wyznaczenie poprawnego

$$\text{stosunku pól trapezów: } \frac{P_2}{P_1} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

1 pkt – wyznaczenie pola  $P_1$  trapezu o podstawach  $a$  i  $b$  (lub pola  $P_2$  trapezu

$$\text{o podstawach } b \text{ i } c): P_1 = \frac{\sqrt{3}(a^2 - b^2)}{4} \text{ (lub } P_2 = \frac{\sqrt{3}(b^2 - c^2)}{4} \text{)}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę lub brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Oznaczmy pole trapezu o podstawach  $a$  i  $b$  jako  $P_1$  oraz pole trapezu o podstawach  $b$  i  $c$  jako  $P_2$  (zobacz rysunki obok).

Pole  $P_1$  możemy zinterpretować jako różnicę pól trójkątów równobocznych o bokach  $a$  i  $b$ :

$$P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}$$

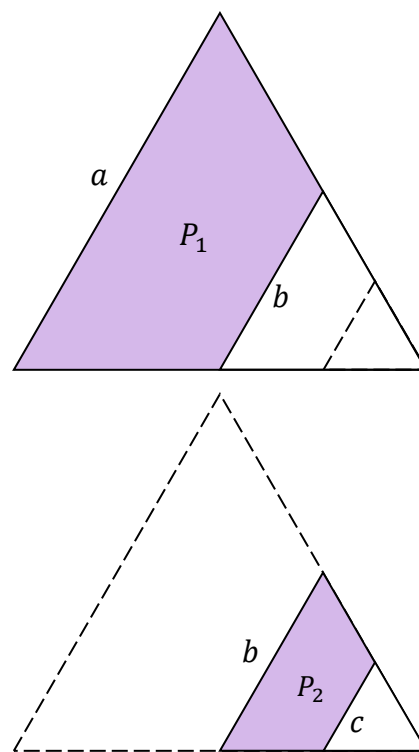
Analogicznie pole  $P_2$  możemy zinterpretować jako różnicę pól trójkątów równobocznych o bokach  $b$  i  $c$ :

$$P_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} - \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}$$

Zatem stosunek pól będzie równy

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}}{\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

To należało pokazać.



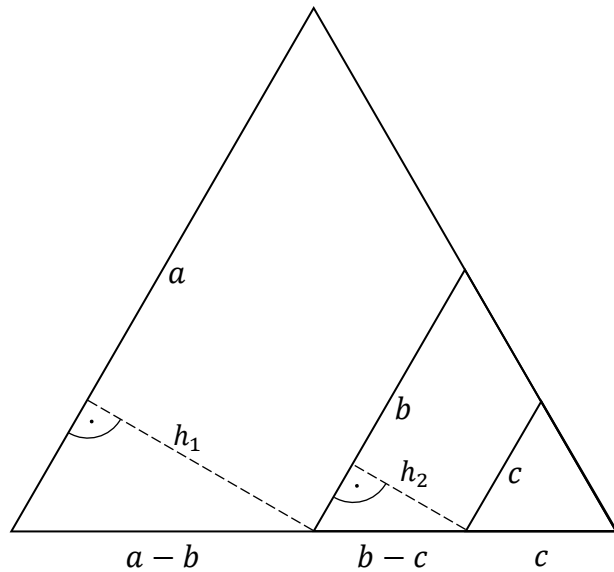
*Sposób II*

Dwie proste równoległe do jednego z boków trójkąta wyznaczają trójkąt równoboczny o boku długości  $b$  oraz trójkąt równoboczny o boku długości  $c$ .

Możemy zatem stwierdzić, że ramiona otrzymanych trapezów mają długości odpowiednio  $(a - b)$  oraz  $(b - c)$ .

Prowadzimy wysokość  $h_1$  w trapezie o podstawach  $a$  i  $b$  oraz wysokość  $h_2$  w trapezie o podstawach  $b$  i  $c$ .

Korzystając z własności trójkąta o kątach  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ , wyznaczamy wysokości obu trapezów:



$$h_1 = \frac{(a - b)\sqrt{3}}{2}$$

$$h_2 = \frac{(b - c)\sqrt{3}}{2}$$

Niech  $P_1$  oznacza pole trapezu o podstawach  $a$  i  $b$ , natomiast  $P_2$  – pole trapezu o podstawach  $b$  i  $c$ . Wówczas

$$P_1 = \frac{1}{2}(a + b) \cdot \frac{(a - b)\sqrt{3}}{2} = \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(b + c) \cdot \frac{(b - c)\sqrt{3}}{2} = \frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}$$

Wyznaczamy stosunek pól trapezów:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(b^2 - c^2)\sqrt{3}}{4}}{\frac{(a^2 - b^2)\sqrt{3}}{4}} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

To należało pokazać.

## IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

## Zadanie 45. (0–1)

| Wymaganie ogólne   | Wymaganie szczegółowe   |
|--|---|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>3. Dobieranie argumentów do uzasadnienia poprawności rozwiązywania problemów, tworzenie ciągu argumentów, gwarantujących poprawność rozwiązania i skuteczność w poszukiwaniu rozwiązań zagadnienia. | Uczeń:<br>IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie [...]. |

## Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

## Rozwiązanie

B3

## Zadanie 46.1. (0–2)

| Wymaganie ogólne   | Wymagania szczegółowe  |
|--|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu. | Uczeń:<br>IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.<br>VIII.2) [...] stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. |

## Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie długości boków trójkąta  $ABC$  i sprawdzenie prawdziwości równości

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

1 pkt – obliczenie długości boków trójkąta  $ABC$ :  $|AB| = \sqrt{225}$ ,  $|BC| = \sqrt{250}$ ,  $|AC| = \sqrt{25}$ 

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy długości boków trójkąta  $ABC$ :

$$|AB| = \sqrt{(-6 - (-15))^2 + (4 - (-8))^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225}$$

$$|BC| = \sqrt{(-19 - (-6))^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{(-13)^2 + (-9)^2} = \sqrt{169 + 81} = \sqrt{250}$$

$$|AC| = \sqrt{(-19 - (-15))^2 + (-5 - (-8))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

Zauważamy, że

$$|AB|^2 + |AC|^2 = (\sqrt{225})^2 + (\sqrt{25})^2 = 225 + 25 = 250 = |BC|^2$$

Zatem, na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, trójkąt  $ABC$  jest prostokątny. To należało pokazać.

### Zadanie 46.2. (0–3)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach [...]. |

### Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie współrzędnych wierzchołka  $D$ :  $D = (-28, -17)$

2 pkt – wyznaczenie równania prostej  $AD$  (lub  $DC$ ), np.  $y = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13}$

$$\left(y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3}\right)$$

ALBO

zapisanie współrzędnych środka  $S$  za pomocą współrzędnych wierzchołków  $B$  i  $D$ :

$$S = \left(\frac{x_D - 6}{2}, \frac{y_D + 4}{2}\right)$$

1 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$  (lub  $BC$ ):  $a_{AB} = \frac{4}{3}$  ( $a_{BC} = \frac{9}{13}$ )

ALBO

obliczenie współrzędnych środka  $S$  przekątnej  $AC$ :  $S = \left(-17, -\frac{13}{2}\right)$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Wierzchołek  $D$  równoległoboku  $ABCD$  jest punktem przecięcia prostych  $AD$  i  $CD$ .

Obliczamy współczynniki kierunkowe prostych  $AB$  i  $BC$ :

$$a_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-8)}{-6 - (-15)} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5 - 4}{-19 - (-6)} = \frac{-9}{-13} = \frac{9}{13}$$

Ponieważ  $AD \parallel BC$ , więc proste  $AD$  i  $BC$  mają równe wartości współczynników kierunkowych, tj.  $a_{AD} = a_{BC} = \frac{9}{13}$ . Wyznaczamy równanie prostej  $AD$ :

$$y = \frac{9}{13}x + b$$

$$-8 = \frac{9}{13} \cdot (-15) + b$$

$$\frac{31}{13} = b$$

Zatem prosta  $AD$  ma równanie  $y = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13}$ .

Ponieważ  $DC \parallel AB$ , więc proste  $DC$  i  $AB$  mają równe wartości współczynników kierunkowych, tj.  $a_{DC} = a_{AB} = \frac{4}{3}$ . Wyznaczamy równanie prostej  $DC$ :

$$y = \frac{4}{3}x + b$$

$$-5 = \frac{4}{3} \cdot (-19) + b$$

$$\frac{61}{3} = b$$

Zatem prosta  $DC$  ma równanie  $y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3}$ .

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia prostych  $AD$  i  $DC$ :

$$\begin{cases} y = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13} \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} = \frac{9}{13}x + \frac{31}{13} \quad / \cdot 39 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 52x + 793 = 27x + 93 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x = -700 \\ y = \frac{4}{3}x + \frac{61}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -28 \\ y = \frac{4}{3} \cdot (-28) + \frac{61}{3} = -17 \end{cases}$$

Wierzchołek  $D$  ma współrzędne:  $D = (-28, -17)$ .

### Sposób II

W równoległoboku  $ABCD$  przekątne dzielą się na połowy, a punkt  $S$  przecięcia się przekątnych jest środkiem symetrii tego równoległoboku. Obliczamy współrzędne środka  $S$  przekątnej  $AC$ :

$$S = \left( \frac{-15 - 19}{2}, \frac{-8 - 5}{2} \right) = \left( \frac{-34}{2}, \frac{-13}{2} \right) = \left( -17, \frac{-13}{2} \right)$$

Ponieważ punkt  $S$  jest środkiem symetrii równoległoboku, jest więc środkiem przekątnej  $BD$  tego równoległoboku. Obliczymy stąd współrzędne punktu  $D$ :

Oznaczmy współrzędne punktu  $D = (x_D, y_D)$ , wtedy

$$\left( \frac{x_D - 6}{2}, \frac{y_D + 4}{2} \right) = \left( -17, \frac{-13}{2} \right)$$

Stąd mamy:  $\frac{x_D - 6}{2} = -17$  oraz  $\frac{y_D + 4}{2} = \frac{-13}{2}$ .

Obliczamy  $x_D$  oraz  $y_D$ :

$$x_D - 6 = -34, \text{ czyli } x_D = -28$$

$$y_D + 4 = -13, \text{ czyli } y_D = -17$$

Zatem punkt  $D$  ma współrzędne:  $D = (-28, -17)$ .

### Zadanie 46.3. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie [...] oraz korzysta z ich własności. |

### Zasady oceniania

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Punkt  $S$  przecięcia środkowych trójkąta  $ABC$  ma współrzędne:  $S = \left( -\frac{40}{3}, -3 \right)$ .

Punkt przecięcia środkowych trójkąta to środek ciężkości trójkąta. Korzystamy z *Wybranych wzorów matematycznych* i obliczamy współrzędne środka ciężkości  $S$  trójkąta  $ABC$ :

$$S = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left( \frac{-15 - 6 - 19}{3}, \frac{-8 + 4 - 5}{3} \right) = \left( -\frac{40}{3}, -3 \right)$$

**Zadanie 47. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe                                 |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>IX.4) posługuje się równaniem okręgu [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – rozwiązanie poprawne.

0 pkt – rozwiązanie niepoprawne albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**Okrąg  $O$  i prosta  $k$  mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy  $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .Z równania okręgu odczytujemy współrzędne środka  $S$  okręgu i promień  $r$  okręgu:

$$S = (0, 0), r = \sqrt{2}.$$

Prosta o równaniu  $y = m$  jest równoległa do osi  $Ox$  układu współrzędnych i przecina oś  $Oy$  w punkcie  $(0, m)$ . Prosta  $k$  ma dwa punkty wspólne z okręgiem tylko wówczas, gdy  $m \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

**Zadanie 48. (0–4)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;<br>IX.5) oblicza odległość punktu od prostej. |

**Zasady oceniania**4 pkt – obliczenie pola  $P$  trójkąta:  $P = 10$ 3 pkt – obliczenie długości odcinka  $AB$ :  $|AB| = 2\sqrt{10}$  oraz obliczenie odległościwierzchołka  $C$  od prostej  $AB$ :  $d = \sqrt{10}$ 

ALBO

zapisanie pola trójkąta z wykorzystaniem wzoru z *Wybranych wzorów*

$$\text{matematycznych: } P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(2 - 0)(7 - 6) - (0 - 6)(3 - 0)|$$

2 pkt – obliczenie długości odcinka  $AB$ :  $|AB| = 2\sqrt{10}$

ALBO

obliczenie odległości  $d$  wierzchołka  $C$  od prostej  $AB$  i obliczenie współrzędnych wierzchołków  $A$  i  $B$ :  $d = \sqrt{10}$ ,  $A = (0, 6)$ ,  $B = (2, 0)$

ALBO

obliczenie współrzędnych wierzchołków  $A$  i  $B$ :  $A = (0, 6)$ ,  $B = (2, 0)$  oraz zapisanie wzoru na pole trójkąta z *Wybranych wzorów matematycznych*:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)((x_C - x_A))|$$

1 pkt – obliczenie współrzędnych punktów  $A$  i  $B$ :  $A = (0, 6)$ ,  $B = (2, 0)$

ALBO

obliczenie odległości  $d$  punktu  $C$  od prostej  $AB$ :  $d = \sqrt{10}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób I

Wierzchołek  $A$  leży na osi  $Oy$ , więc jego pierwsza współrzędna jest równa 0.

Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka  $A$ :

$$y = -3x + 6 \text{ i } x = 0$$

$$y = -3 \cdot 0 + 6$$

czyli  $A = (0, 6)$ .

Wierzchołek  $B$  leży na osi  $Ox$ , więc jego druga współrzędna jest równa 0.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka  $B$ :

$$y = -3x + 6 \text{ i } y = 0$$

$$0 = -3x + 6$$

$$x = 2$$

Zatem  $B = (2, 0)$ .

Obliczamy długość odcinka  $AB$ :

$$|AB| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Przekształcamy równanie prostej  $AB$  do postaci ogólnej:  $3x + y - 6 = 0$ .

Obliczamy odległość wierzchołka  $C = (3, 7)$  od prostej  $AB$ :

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Obliczona odległość  $d$  jest wysokością trójkąta  $ABC$  opuszczoną z wierzchołka  $C$  na podstawę  $AB$ .

Obliczamy pole trójkąta  $ABC$ :

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10$$



## Sposób II

Wierzchołek  $A$  leży na osi  $Oy$ , więc jego pierwsza współrzędna jest równa  $0$ .

Obliczamy drugą współrzędną wierzchołka  $A$ :

$$y = -3x + 6 \text{ i } x = 0$$

$$y = -3 \cdot 0 + 6$$

czyli  $A = (0, 6)$ .

Wierzchołek  $B$  leży na osi  $Ox$ , więc jego druga współrzędna jest równa  $0$ .

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka  $B$ :

$$y = -3x + 6 \text{ i } y = 0$$

$$0 = -3x + 6$$

$$x = 2$$

Zatem  $B = (2, 0)$ .

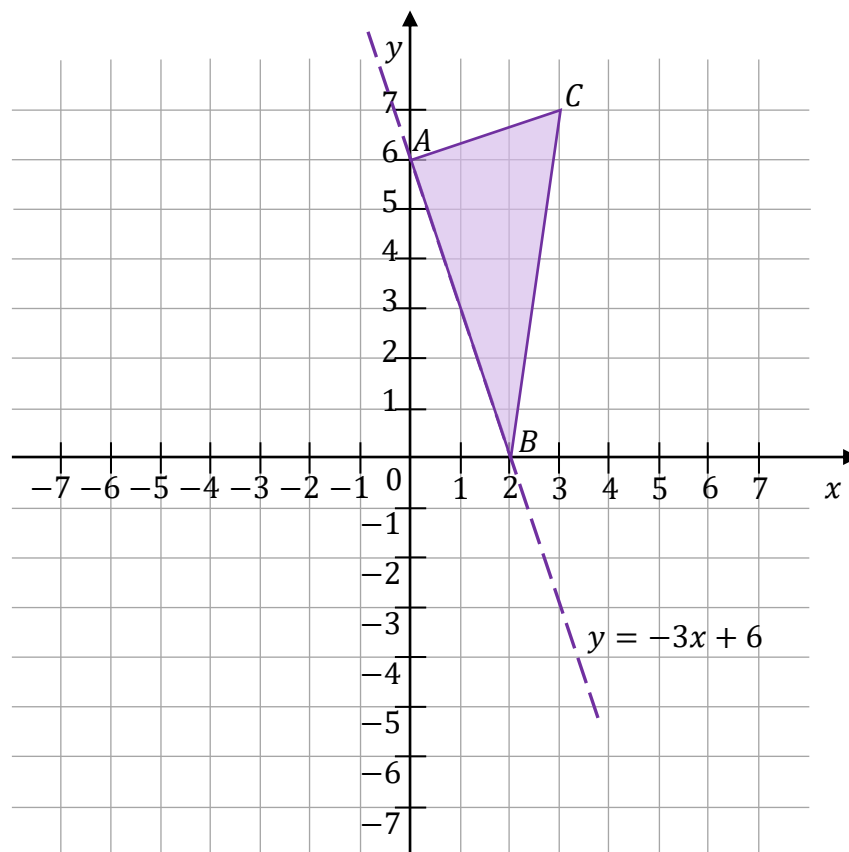
Pole trójkąta  $ABC$  obliczymy korzystając z wzoru z *Wybranych wzorów matematycznych*:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)((x_C - x_A))|$$

Obliczamy pole trójkąta  $ABC$ :

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(2 - 0)(7 - 6) - (0 - 6)(3 - 0)| = \frac{1}{2} |2 - (-18)| = 10.$$

Rysunek ilustracyjny do zadania.



**Zadanie 49. (0–4)**

| Wymaganie ogólne   | Wymagania szczegółowe  |
|--|--|
| IV. Rozumowanie i argumentacja.<br>4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych. | Uczeń:<br>IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;<br>IX.4) posługuje się równaniem okręgu [...]. |

**Zasady oceniania**

4 pkt – obliczenie promienia  $r$  okręgu:  $r = 5\sqrt{5}$ .

3 pkt – obliczenie współrzędnych środka  $S$  okręgu:  $S = (3, 14)$ .

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą wynikającego z równości długości odcinków  $AS$  oraz  $BS$ , np.

$$\sqrt{(x_S - (-8))^2 + (4x_S + 2 - 12)^2} = \sqrt{(x_S - (-2))^2 + (4x_S + 2 - 4)^2}$$

ALBO

obliczenie współrzędnych środka  $D$  cięciwy  $AB$  oraz obliczenie współczynnika

kierunkowego  $a_2$  prostej prostopadłej do  $AB$ :  $D = (-5, 8)$ ,  $a_2 = \frac{3}{4}$

1 pkt – zapisanie współrzędnych środka  $S$  okręgu w zależności od jednej zmiennej, np.

$$S = (x_S, 4x_S + 2)$$

ALBO

obliczenie współrzędnych środka  $D$  cięciwy  $AB$ :  $D = (-5, 8)$ ,

ALBO

obliczenie współczynnika kierunkowego  $a_1$  prostej przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$ :

$$a_1 = -\frac{4}{3}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązania***Sposób I*

Niech  $x_S$  będzie pierwszą współrzędną środka  $S$  okręgu  $\mathcal{O}$ .

Ponieważ  $S$  leży na prostej  $k$ , więc  $S = (x_S, 4x_S + 2)$ .

Punkty  $A$  oraz  $B$  leżą na okręgu, więc  $|AS| = |BS|$ . Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\sqrt{(x_S - (-8))^2 + (4x_S + 2 - 12)^2} = \sqrt{(x_S - (-2))^2 + (4x_S + 2 - 4)^2}$$

$$\sqrt{(x_S + 8)^2 + (4x_S - 10)^2} = \sqrt{(x_S + 2)^2 + (4x_S - 2)^2} \quad /(\ )^2$$

$$(x_S + 8)^2 + (4x_S - 10)^2 = (x_S + 2)^2 + (4x_S - 2)^2$$

$$x_S^2 + 16x_S + 64 + 16x_S^2 - 80x_S + 100 = x_S^2 + 4x_S + 4 + 16x_S^2 - 16x_S + 4$$

$$-52x_S = -156$$

$$x_S = 3$$

Zatem  $4x_S + 2 = 4 \cdot 3 + 2 = 14$  i  $S = (3, 14)$ .

Promień  $r$  okręgu  $\mathcal{O}$  jest równy odległości punktu  $A$  od środka  $S$  okręgu, więc

$$r = |AS| = \sqrt{(3 - (-8))^2 + (14 - 12)^2} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

### Sposób II

Środek  $S$  okręgu  $\mathcal{O}$  jest punktem przecięcia prostej  $k$  z symetralną cięciwy  $AB$ .

W celu wyznaczenia równania symetralnej cięciwy  $AB$  należy:

- obliczyć współrzędne środka  $D$  cięciwy  $AB$
- obliczyć współczynnik kierunkowy prostej zawierającej  $AB$
- obliczyć współczynnik kierunkowy prostej, która jest prostopadła do  $AB$
- wyznaczyć równanie prostej prostopadłej do  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $D$ .

Obliczamy współrzędne środka  $D$  cięciwy  $AB$ :

$$D = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{-8 - 2}{2}, \frac{12 + 4}{2} \right) = (-5, 8)$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy  $a_1$  prostej zawierającej cięciwę  $AB$ :

$$a_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 12}{-2 - (-8)} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy  $a_2$  prostej prostopadłej do  $AB$ :

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

$$-\frac{4}{3} \cdot a_2 = -1 \quad / \cdot \left( -\frac{4}{3} \right)$$

$$a_2 = \frac{3}{4}$$

Wyznaczamy równanie symetralnej cięciwy  $AB$  (tj. prostej, która przechodzi przez środek cięciwy  $AB$  i jest prostopadła do  $AB$ ):

$$y = a_2 x + b$$

$$8 = \frac{3}{4} \cdot (-5) + b$$

$$\frac{47}{4} = b$$

Zatem symetralna cięciwy  $AB$  ma równanie  $y = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4}$ .

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia prostych o równaniach  $y = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4}$

i  $y = 4x + 2$ :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4} \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2 = \frac{3}{4}x + \frac{47}{4} \quad / \cdot 4 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x + 8 = 3x + 47 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \cdot 3 + 2 \end{cases}$$

Środek  $S$  okręgu  $\mathcal{O}$  ma współrzędne  $S = (3, 14)$ .

Promień  $r$  okręgu  $\mathcal{O}$  jest równy odległości punktu  $A$  od środka  $S$  okręgu, więc

$$r = |AS| = \sqrt{(3 - (-8))^2 + (14 - 12)^2} = \sqrt{11^2 + 2^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

#### Zadanie 50. (0–3)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>IX.6) znajduje punkty wspólne [...] prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej. |

#### Zasady oceniania

3 pkt – obliczenie współrzędnych punktów przecięcia wykresów funkcji  $f$  oraz  $g$ :  $(1, 4)$  oraz  $(2, 3)$

ALBO

narysowanie wykresów funkcji  $f$  oraz  $g$ , odczytanie i zapisanie współrzędnych punktów przecięcia wykresów tych funkcji oraz sprawdzenie rachunkiem, że punkty o odczytanych współrzędnych należą jednocześnie do wykresów każdej z funkcji.

2 pkt – rozwiązanie równania kwadratowego  $-x + 5 = -x^2 + 2x + 3$ :  $x_1 = 1$  oraz  $x_2 = 2$

ALBO

narysowanie wykresów funkcji  $f$  oraz  $g$  oraz odczytanie i zapisanie współrzędnych punktów przecięcia wykresów tych funkcji.

1 pkt – zapisanie równania kwadratowego  $-x + 5 = -x^2 + 2x + 3$

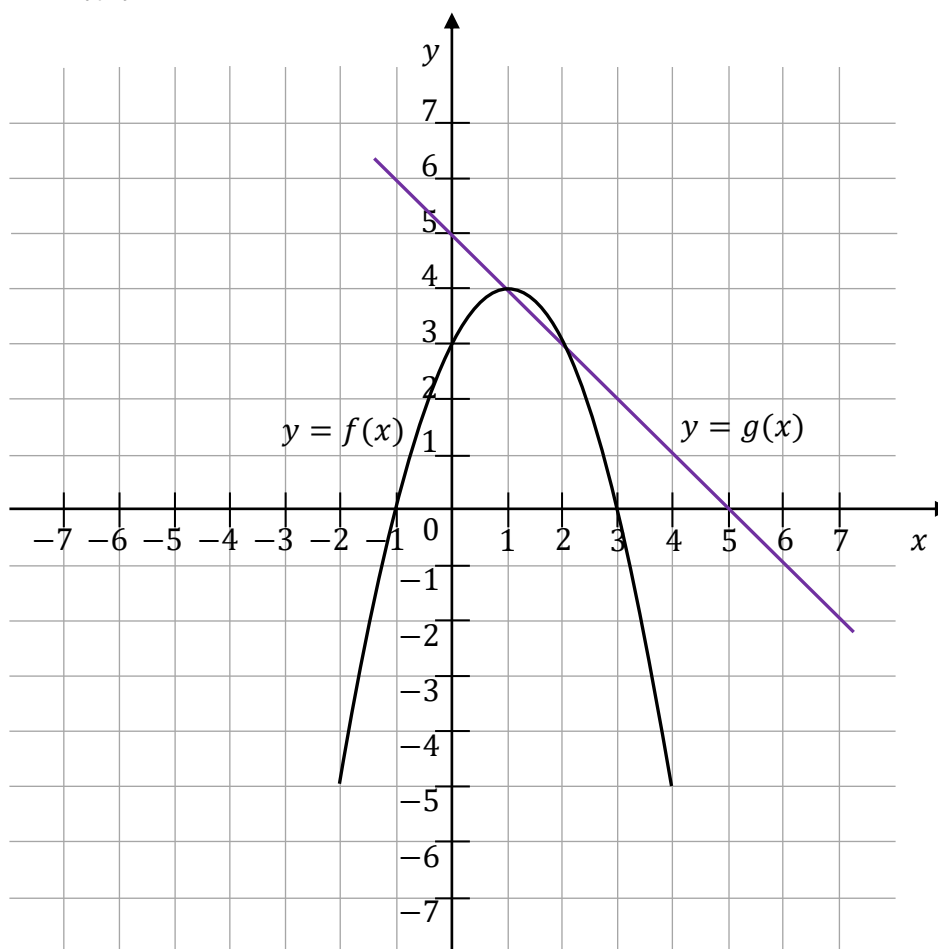
ALBO

narysowanie wykresu funkcji kwadratowej  $f$  lub wykresu funkcji liniowej  $g$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

## Przykładowe pełne rozwiązania

Rysunek ilustracyjny od zadania.



## Sposób I

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

Po podstawieniu do pierwszego z powyższych równań w miejsce  $y$  wyrażenia  $-x + 5$  otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$-x + 5 = -x^2 + 2x + 3$$

Przekształcamy to równanie równoważnie do postaci  $ax^2 + bx + c = 0$  i rozwiązujemy:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$$

$$x_1 = 1 \quad \text{lub} \quad x_2 = 2$$

Obliczamy wartości drugich współrzędnych punktów wspólnych paraboli i prostej.

Dla  $x_1 = 1$  otrzymujemy  $y_1 = -1 + 5 = 4$ .

Dla  $x_2 = 2$  otrzymujemy  $y_2 = -2 + 5 = 3$ .

Wykresy funkcji przecinają się w punktach  $(1, 4)$  oraz  $(2, 3)$ .

### Sposób II

Przekształcamy wzór funkcji kwadratowej  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  do postaci kanonicznej:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -x^2 + 2x - 1 + 4 = -(x^2 - 2x + 1) + 4 = -(x - 1)^2 + 4$$

Odczytujemy współrzędne wierzchołka  $W$  paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ :

$W = (1, 4)$ . Rysujemy wykres funkcji  $f$ .

Ponieważ współczynnik przy  $x^2$  we wzorze funkcji  $f$  jest ujemny ( $a < 0$ ), więc parabola ma ramiona skierowane ku dołowi.

Rysujemy prostą, która jest wykresem funkcji  $g$  oraz parabolę, która jest wykresem funkcji  $f$ .

Na podstawie sporządzonych wykresów funkcji odczytujemy współrzędne punktów przecięcia:  $(1, 4)$  oraz  $(2, 3)$ .

Sprawdzamy rachunkowo, czy punkty o odczytanych współrzędnych należą do wykresów obu funkcji:

$$f(1) = -(1 - 1)^2 + 4 = 4$$

$$g(1) = -1 + 5 = 4$$

Punkt  $(1, 4)$  należy do wykresów funkcji  $f$  i  $g$ .

$$f(2) = -(2 - 1)^2 + 4 = 3$$

$$g(2) = -2 + 5 = 3$$

Punkt  $(2, 3)$  należy do wykresów funkcji  $f$  i  $g$ .

Wykresy funkcji przecinają się w punktach  $(1, 4)$  oraz  $(2, 3)$ .

## X. Stereometria

## Zadanie 51. (0–2)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>X.5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną. |

## Zasady oceniania

2 pkt – obliczenie pola trójkąta  $DES$ :  $P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$

1 pkt – wyznaczenie boków trójkąta  $DES$ :  $\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

## Przykładowe pełne rozwiązanie

Trójkąt  $ECD$  jest równoboczny, ponieważ jest równoramienny i kąt przy wierzchołku  $C$  ma miarę  $60^\circ$ . Zatem  $|DE| = \frac{1}{2}a$ .

Odcinki  $SE$  i  $SD$  są wysokościami ścian bocznych, zatem  $|SE| = |SD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Trójkąt  $DES$  ma wówczas boki długości:  $\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do obliczenia jego pola potrzebujemy wielkości  $p$  – połowy jego obwodu:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4}$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{\frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} \left( \frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} - \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2}$$

$$P_{\Delta} = \sqrt{\frac{a(1 + 2\sqrt{3})}{4} \cdot \frac{a(2\sqrt{3} - 1)}{4} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$$

**Zadanie 52. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>X.5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;<br>VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombch i trapezach. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – obliczenie pola powierzchni ostrosłupa  $ABDE$ :  $P = \frac{a^2(3+\sqrt{3})}{2}$

1 pkt – zapisanie, że pole powierzchni ostrosłupa  $ABDE$  jest równe sumie pól trzech trójkątów prostokątnych oraz pola trójkąta równobocznego.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Pole ostrosłupa  $ABDE$  jest równe sumie pól trzech przystających trójkątów równoramiennych prostokątnych ( $ABD$ ,  $ABE$  i  $ADE$ ) oraz trójkąta równobocznego  $BDE$

Trójkąt prostokątny stanowi połowę ściany sześciąnu, zatem jego pole to  $\frac{1}{2}a^2$ . Bok trójkąta równobocznego jest przekątną ściany bocznej sześciąnu, zatem ma długość  $a\sqrt{2}$ . Jego pole to  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

Obliczamy pole powierzchni ostrosłupa  $ABDE$ , dodając pola trzech trójkątów prostokątnych i pole trójkąta równobocznego:

$$P = 3 \cdot \frac{1}{2}a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2(3 + \sqrt{3})}{2}$$

**Zadanie 53. (0–2)**

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;<br>VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombch i trapezach. |



### Zasady oceniania

2 pkt – poprawne wskazanie trzech odpowiedzi.

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – poprawne wskazanie jednej odpowiedzi lub odpowiedzi niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

### Rozwiązanie

1.P

2.F

3.P

### Zadanie 54. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymagania szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń<br>X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;<br>X.7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych. |

### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

### Rozwiązanie

A

### Zadanie 55. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń<br>X.6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń. |

### Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

### Rozwiązanie

FP

## XI. Kombinatoryka

### Zadanie 56. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...]. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 57. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 58. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...]. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

**Zadanie 59. (0–1)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 60. (0–2)**

| Wymagania ogólne   | Wymagania szczegółowe  |
|--|--|
| II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.<br>1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.<br>III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;<br>XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...]. |

**Zasady oceniania**

2 pkt – poprawne uzupełnienie wszystkich komórek tabeli.

1 pkt – poprawne uzupełnienie dwóch komórek tabeli.

0 pkt – poprawne uzupełnienie jednej komórki tabeli lub odpowiedź niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

**Pełne rozwiązanie**

| Cechy kul i pojemników                          | Liczba wszystkich różnych rozmieszczeń kul w pojemnikach |
|---|--|
| Kule rozróżnialne, pojemniki rozróżnialne       | E  |
| Kule rozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne    | C  |
| Kule nierozróżnialne, pojemniki rozróżnialne    | A  |
| Kule nierozróżnialne, pojemniki nierozróżnialne | D  |

## XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

### Zadanie 61. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych. | Uczeń:<br>XII.3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 62. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XII.3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 63. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 64. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna, albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

### Zadanie 65. (0–1)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | Uczeń:<br>XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – poprawne wskazanie dwóch odpowiedzi.

0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

FF

### XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

#### Zadanie 66. (0–3)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | XIII. Optymalizacja. Uczeń:<br>rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. |

#### Zasady oceniania

- 3 pkt – poprawna metoda obliczenia ceny gry  $x$ , przy której przychód ze sprzedaży gry jest największy oraz podanie prawidłowych wyników:  $x = 80$  oraz  $P(80) = 96\,000$  zł.
- 2 pkt – poprawne zapisanie wzoru funkcji  $P$  przychodu w zależności od ceny  $x$ , oraz prawidłowe obliczenie argumentu  $x$ , dla którego funkcja przychodu  $P$  osiąga wartość największą:  $P(x) = -15x^2 + 2\,400x$ ,  $x = 80$ .
- 1 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji  $P$  przychodu w zależności od ceny  $x$ :  
 $P(x) = -15x^2 + 2\,400x$ .
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Tygodniowy przychód ze sprzedaży jest iloczynem ceny  $x$  gry oraz popytu  $f(x)$  na tę grę przy danej cenie:

$$P(x) = x \cdot f(x)$$

Zatem funkcja przychodu  $P$  ma wzór

$$P(x) = x \cdot (2\,400 - 15x) = -15x^2 + 2\,400x$$

Warto zauważyć, że wykresem funkcji  $P(x)$  jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu dla  $x \in (0, +\infty)$ . Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja  $P$  osiąga wartość największą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli.

Obliczamy pierwszą współrzędną  $x$  wierzchołka paraboli:

$$x = \left( -\frac{2\,400}{2 \cdot (-15)} \right) = 80$$

Funkcja przychodu  $P(x)$  osiąga wartość największą dla argumentu  $x = 80$ .

Obliczamy największy tygodniowy przychód:

$$P(80) = -15 \cdot 80^2 + 2\,400 \cdot 80 = 96\,000 \text{ zł}$$

**Zadanie 67. (0–4)**

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe  |
|---|--|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | XIII. Optymalizacja. Uczeń:<br>rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. |

**Zasady oceniania**

- 4 pkt – poprawna metoda obliczenia długości odcinka  $x$ , dla którego pole czworokąta jest największe oraz podanie prawidłowych wyników:  $x = 4$  oraz  $P(4) = 28$
- 3 pkt – poprawne zapisanie wzoru na pole  $P$  czworokąta w zależności od jednej zmiennej, wyznaczenie dziedziny  $D$  tej funkcji oraz prawidłowe obliczenie argumentu  $x$ , dla którego funkcja pola osiąga wartość największą:  $P(x) = 2x^2 - 16x + 60$ ,  $D = [3, 6)$ ,  $x = 4$
- 2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji  $P$  pola w zależności od zmiennej  $x$ :  
 $P(x) = 2x^2 - 16x + 60$
- 1 pkt – wyznaczenie funkcji  $P$  pola czworokąta  $ABCD$  jako różnicy pola prostokąta  $PQRS$  i sumy pól trójkątów prostokątnych  $APD$ ,  $AQB$ ,  $BRC$ ,  $CSD$   
$$P(x) = 10 \cdot 6 - \left[ \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) + \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) \right]$$
- 0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Z treści zadania wynika, że  $|AQ| = |BR| = |CS| = |DP| = x$  oraz  $|PQ| = |SR| = 10$  i  $|PS| = |QR| = 6$ .  
Wtedy  $|AP| = |CR| = 10 - x$  oraz  $|BQ| = |DS| = 6 - x$ .

Wyznamy pole czworokąta  $ABCD$  jako funkcję zmiennej  $x$ .

Pole czworokąta  $ABCD$  jest równe różnicy pola prostokąta  $PQRS$  i sumy pól trójkątów prostokątnych  $AQB$ ,  $BRC$ ,  $CSD$  i  $DPA$ .

$$P(x) = 10 \cdot 6 - \left[ \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) + \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}x(10-x) \right]$$

Przekształcając dalej wzór funkcji, otrzymujemy

$$P(x) = 2x^2 - 16x + 60$$

Wyznamy dziedzinę  $D$  funkcji  $P$ , zapisując warunki

$$x \geq 3 \quad \text{i} \quad x < 6 \quad \text{i} \quad x < 10$$

Zatem  $D = [3, 6)$ .

Wykresem funkcji  $P(x)$  jest fragment paraboli skierowanej ramionami ku górze. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja  $P$  może osiągnąć wartość najmniejszą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

Ponieważ  $x = \left(-\frac{(-16)}{2 \cdot 2}\right) = 4$  należy do dziedziny funkcji, funkcja  $P$  osiąga wartość najmniejszą dla argumentu  $x = 4$ .

Obliczamy najmniejsze pole

$$P(4) = 2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 60 = 28$$

### Zadanie 68. (0–4)

| Wymaganie ogólne  | Wymaganie szczegółowe   |
|---|---|
| III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.<br>2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. | XIII. Optymalizacja. Uczeń: rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową. |

### Zasady oceniania

4 pkt – obliczenie wymiarów prostokąta oraz największego możliwego pola prostokąta:

$$x = \frac{3}{2}, y = 2, P = 3$$

3 pkt – wyznaczenie argumentu, dla którego funkcji  $P(x)$  osiąga wartość największą:

$$x = \frac{3}{2}$$

2 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji  $P$  pola w zależności od zmiennej  $x$ :

$$P(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$$

1 pkt – wyznaczenie zależności między bokami prostokąta, np.

$$\frac{3-x}{y} = \frac{3}{4}$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy za  $x$  długość boku prostokąta zawartego w krótszej przyprostokątnej trójkąta, a za  $y$  długość boku prostokąta zawartego w dłuższej przyprostokątnej trójkąta (zobacz rysunek).

Boki prostokąta wyznaczają dwa dodatkowe trójkąty prostokątne o przyprostokątnych  $3-x$  i  $y$  oraz  $x$  i  $4-y$ .

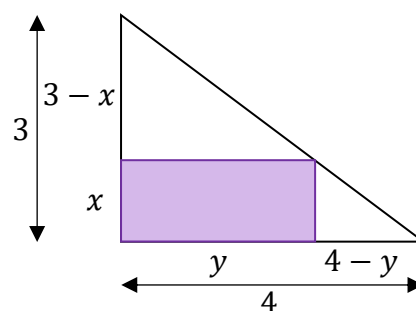
Wszystkie trzy trójkąty są podobne, ponieważ ich odpowiednie kąty są równe.

Korzystając z ich podobieństwa, możemy zapisać proporcję:

$$\frac{3-x}{y} = \frac{3}{4}$$

Wynika stąd, że

$$y = 4 - \frac{4}{3}x$$





Pole prostokąta możemy zapisać jako  $P = x \cdot y$ , a wykorzystując powyższe podstawienie, otrzymujemy:

$$P(x) = x \cdot \left(4 - \frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 4x$$

Dziedziną funkcji  $P(x)$  jest przedział  $(0, 3)$ .

Wykresem funkcji  $P(x)$  jest fragment paraboli skierowanej ramionami do dołu. Z własności funkcji kwadratowej wynika, że funkcja  $P$  może osiągnąć wartość największą w punkcie odpowiadającym wierzchołkowi paraboli. Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli

$$p = -\frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

Argument ten należy do dziedziny funkcji  $P(x)$ .

$$\text{Dla } x = \frac{3}{2} \text{ mamy } y = 4 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$$

Zatem największe pole ma prostokąt o wymiarach  $\frac{3}{2}$  i 2 jest ono równe

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$