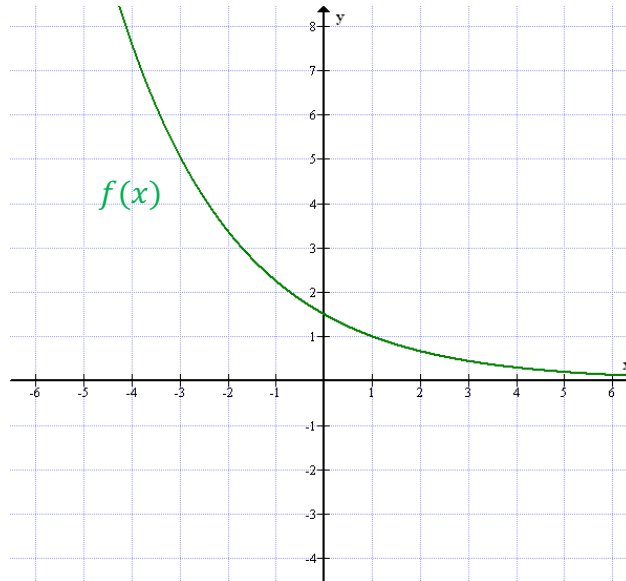


Zadanie Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.



- Oblicz wartość funkcji dla argumentu $\frac{1}{2}$.
- Oblicz argument dla którego wartość funkcji wynosi $\frac{16}{81}$.
- Dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od $2\frac{1}{4}$?
- Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x) - 3$.

Rozwiązanie:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) Trzeba rozwiązać równanie:

$$\begin{aligned}\frac{16}{81} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^4 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \\ 4 &= x - 1 \\ x &= 5\end{aligned}$$

Odpowiedź: Funkcja przyjmuje wartość $\frac{16}{81}$ dla argumentu $x = 5$.

c) Trzeba rozwiązać nierówność:

$$\begin{aligned}f(x) &> 2\frac{1}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} &> 2\frac{1}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} &> \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} &> \left(\frac{3}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Teraz przechodzimy do nierówności na wykładnikach, ale ponieważ podstawa funkcji wykładniczej jest mniejsza od 1 ($\frac{2}{3} < 1$), to zmieniamy znak nierówności:

$$x - 1 < -2$$

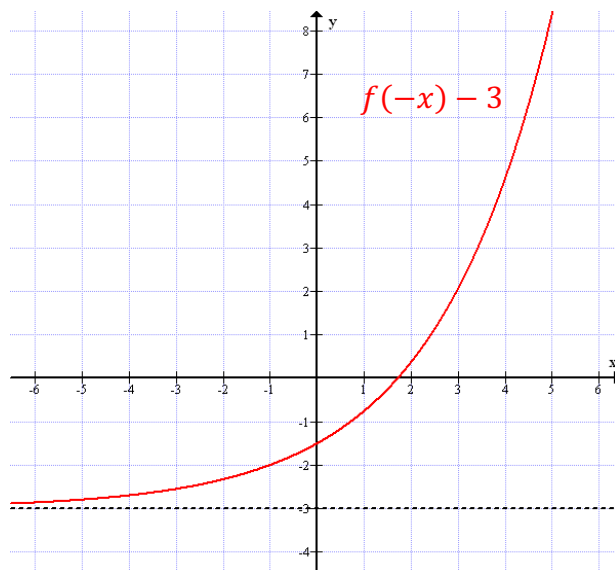
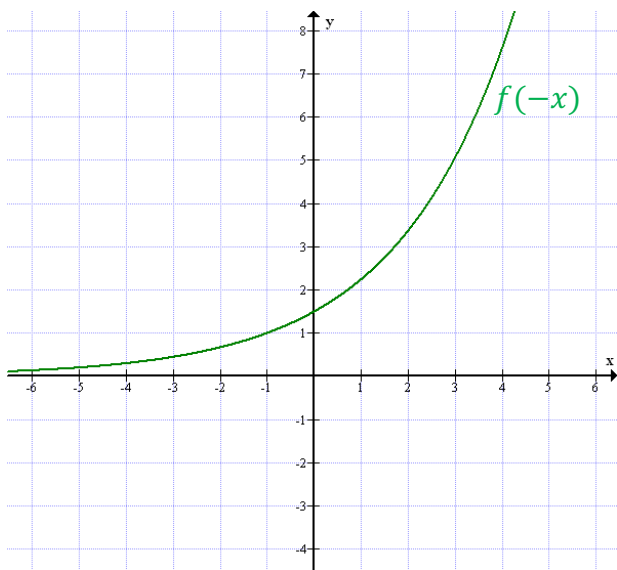
$$x < -1$$

Odpowiedź: Funkcja przyjmuje wartości większe od $2\frac{1}{4}$ dla argumentów $x < -1$.

- d) Funkcję $g(x) = f(-x) - 3$ otrzymujemy w wyniku dwóch przekształceń funkcji $f(x)$. Pierwszym jest symetria względem osi OY, a drugim przesunięcie o 3 jednostki w dół.

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \xrightarrow{\text{SOY}} f_1(x) = f(-x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-1}$$

$$f_1(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-1} \xrightarrow{\vec{v}=[0,-3]} g(x) = f_1(x) - 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-1} - 3$$



A wzór funkcji $g(x)$ to oczywiście:

$$g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-1} - 3$$