Zadanie Dana jest funkcja logarytmiczna o wzorze $f(x) = \log_4(x-k)+3$, gdzie k jest parametrem. Dziedziną funkcji jest przedział $(2, +\infty)$. Podaj wartość parametru k, a następnie:

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 18.
b) Oblicz argument, dla którego wartość funkcji f wynosi 3,5.
c) Określ, dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.

Rozwiązanie:

Jeżeli mamy dany logarytm $\log_a b$, to musimy założyć, że $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$. W ten sposób określa się dziedzinę logarytmu.

Określmy zatem dziedzinę naszej funkcji, w której występuje logarytm:

$$x - k > 0$$

$$x > k$$

Czyli dziedziną funkcji jest przedział: $(k, +\infty)$.

Z treści zadania wiemy, że dziedziną funkcji jest przedział $(2, +\infty)$, zatem wynika z tego, że $k = 2$.

Czyli:

$$f(x) = \log_4(x-2)+3$$

a) $f(18) = \log_4(18-2)+3 = \log_4 16 + 3 = 2 + 3 = 5$
b) Musimy rozwiązać równanie:

$$\log_4(x-2)+3 = 3{,}5$$
$$\log_4(x-2) = \frac{1}{2}$$
$$4^{\log_4(x-2)} = 4^{\frac{1}{2}}$$
$$x - 2 = 4^{\frac{1}{2}}$$
$$x - 2 = 2$$
$$x = 4$$

c) Musimy rozwiązać nierówność:

$$\log_4(x-2)+3 > 0$$
$$\log_4(x-2) > -3$$
$$4^{\log_4(x-2)} > 4^{-3}$$
$$x - 2 > 4^{-3}$$
$$x > \frac{1}{64} + 2$$
$$x > 2\frac{1}{64}$$